

# Caracterización *fuzzy* de la distribución de una variable aleatoria. Aplicaciones

*Fuzzy characterization of the distribution  
of a random variable. Applications*

Manuel Souto Juan



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
*University of Oviedo*

Trabajo Fin de Grado  
Curso 2018-2019

*supervisado por*  
*Beatriz Sinova y María Ángeles Gil*  
*Universidad de Oviedo*







# Prólogo

La Estadística es la rama de las Matemáticas que describe y analiza conjuntos de datos de forma que, basándose en el cálculo de probabilidades, realiza inferencias y obtiene conclusiones sobre ellos. Por ello, se han desarrollado una gran variedad de técnicas de análisis e interpretación de datos.

Uno de los problemas centrales en Estadística es la caracterización de las variables aleatorias, es decir, la determinación de la distribución con la que dicha variable toma sus valores posibles. Esta caracterización pasa por el conocimiento de la función de probabilidad/densidad o la función de distribución de esa variable, que en muchos casos pertenece (exacta o aproximadamente) a cierta familia paramétrica.

En este trabajo se estudiará una forma alternativa de caracterizar funcionalmente la distribución de variables aleatorias reales. Esta caracterización se basa en el valor medio de ciertos elementos aleatorios con valores de número *fuzzy*. Una motivación del empleo de esta caracterización alternativa es, esencialmente, que está basada en un valor medio (*fuzzy*), lo que confiere consistencia a los procedimientos inferenciales que la involucran y para los que, con frecuencia, pueden emplearse resultados tipo límite y sus aproximaciones bootstrap.

Si bien en algunas ocasiones las variables en estudio llevan asociada de forma exacta e inmediata una distribución conocida (como ocurre con buena parte de las variables con distribuciones discretas), no siempre resulta evidente el modelo de distribución, exacto o aproximado, que sigue una variable aleatoria. En este sentido, los procedimientos de ***contraste de bondad de ajuste*** a una distribución hipotética se ocupan de verificar hasta qué punto resulta sostenible que los datos obtenidos por el muestreo de dicha variable puedan provenir, efectivamente, de tal distribución.

Al mismo tiempo, otro problema de interés estadístico es el del ***contraste de la simetría*** de la distribución de una variable aleatoria. Cuando una distribución es marcadamente asimétrica, es sabido que algunas de las medidas de localización más usuales, como la media, suelen estar muy influenciadas por los valores extremos, y resultan poco representativas de la tendencia central de esa distribución. Así mismo,

muchos estudios estadísticos muestran comportamientos muy dispares o sus conclusiones son más o menos oportunas según se trabaje con distribuciones simétricas o asimétricas.

Este trabajo presenta en el Capítulo 1 las nociones preliminares sobre los números *fuzzy*, prestando atención especial a la aritmética y las métricas involucradas en el tratamiento estadístico de datos *fuzzy*, al concepto de número *fuzzy* aleatorio y algunas de las medidas resumen de su distribución, así como ciertos procedimientos de la metodología para el análisis de datos *fuzzy*. El capítulo hace un recorrido exhaustivo y unificado sobre estas nociones, pormenorizando las demostraciones de los resultados esenciales, a excepción de unos pocos que requerirían de desarrollos previos muy alejados de la extensión y alcance de un trabajo fin de grado.

En el Capítulo 2 se estudia una clase de métodos de “*fuzzificación*” de una variable aleatoria real y su aplicación a la caracterización de la distribución de dicha variable. A continuación se examinan algunas implicaciones de esta caracterización para el contraste de bondad de ajuste de la distribución de una variable aleatoria a una distribución hipotética totalmente especificada y para el contraste de la simetría de la distribución de una variable aleatoria con respecto de un punto real específico. La aplicación de ambos procedimientos se ilustra con un problema real del campo de la Física.

El trabajo finaliza con algunas conclusiones y observaciones de interés.

# Índice general

Prólogo	I
Contenidos	III
Índice de Figuras	IV
Índice de Tablas	VII
<b>1. Introducción a los Números <i>Fuzzy</i> Aleatorios</b>	<b>1</b>
1.1. Formalización de los números <i>fuzzy</i> . . . . .	2
1.2. Aritmética y métricas entre números <i>fuzzy</i> . . . . .	6
1.3. Formalización de los números <i>fuzzy</i> aleatorios . . . . .	25
1.3.1. Números <i>fuzzy</i> aleatorios: definición . . . . .	26
1.3.2. La media tipo Aumann de un número <i>fuzzy</i> aleatorio . . . . .	28
1.4. Algunos métodos del análisis de datos <i>fuzzy</i> . . . . .	35
<b>2. <i>Fuzzificación</i> caracterizadora de la distribución de variables aleatorias reales. Aplicaciones</b>	<b>41</b>
2.1. <i>Fuzzificación</i> de una variable aleatoria real. <i>Fuzzificación</i> caracterizadora . . . . .	41
2.2. Aplicación al contraste de bondad de ajuste . . . . .	49
2.3. Aplicación al contraste de simetría . . . . .	56
<b>Conclusiones finales</b>	<b>63</b>
<b>Referencias y otra bibliografía consultada</b>	<b>65</b>
<b>Índice temático</b>	<b>69</b>
<b>Índice de símbolos</b>	<b>73</b>



# Índice de figuras

1.1.	Representación gráfica del número triangular $\text{Tri}(a, b, c)$ . . . . .	6
1.2.	Representación gráfica de la suma de dos números <i>fuzzy</i> triangulares . . . . .	9
1.3.	Representación gráfica del producto por $k = 2$ de un número <i>fuzzy</i> triangular . . . . .	10
1.4.	Ejemplo de distancia euclídea entre dos puntos ‘correspondientes’ de los $\alpha$ -niveles en la $(W, \varphi)$ -distancia . . . . .	12
2.1.	<i>Fuzzificación</i> triangular del ejemplo para $k = 4$ . . . . .	42
2.2.	<i>Fuzzificación</i> $\gamma^s$ (con $x_0 = 0$ y $a = 1$ ) de una variable aleatoria que toma los valores $-2, -1, 0, 1$ y $2$ . . . . .	47
2.3.	Media tipo Aumann de la <i>fuzzificación</i> $\gamma^s$ (con $x_0 = 5$ y $a = 1$ ) de una variable aleatoria que sigue distribución binomial (de izquierda a derecha: Binomial(10, 0.1), Binomial(10, 0.5) y Binomial(10, 0.9)) . . . . .	48
2.4.	Media tipo Aumann de la <i>fuzzificación</i> $\gamma^s$ (con $x_0 = 0$ y $a = 1$ ) de una variable aleatoria que sigue distribución normal (de izquierda a derecha: $\mathcal{N}(0, 1)$ , $\mathcal{N}(0, 2)$ (con trama de guiones) y $\mathcal{N}(1, 1)$ ) . . . . .	48
2.5.	$\gamma^{sim}$ - <i>fuzzificación</i> (con $x_0 = 0$ y $a = 1$ ) de una variable aleatoria que toma los valores $0, 1, 2, \dots$ (en negro la $\gamma^{sim}$ - <i>fuzzificación</i> de los valores que han aparecido en la muestra) . . . . .	55
2.6.	Medias tipo Aumann de la $\gamma^{sim}$ - <i>fuzzificación</i> de una variable aleatoria con distribución Poisson(1) (línea continua) y de la distribución muestral de la Tabla 2.1 (línea con guiones) . . . . .	56
2.7.	A la izquierda, función de densidad de $\mathcal{N}(4, 1)$ , a la derecha $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4)) = \tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$ . . . . .	59
2.8.	A la izquierda, función de densidad de $\chi_4^2$ , a la derecha $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4))$ y $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$ . . . . .	59
2.9.	A la izquierda, función de densidad de $0.5 \cdot \mathcal{N}(4, 1) + 0.5 \cdot \chi_4^2$ , a la derecha $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4))$ y $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$ . . . . .	59

2.10. $\gamma^{sim}$ -fuzzificación (con $x_0 = 0$ y $a = 1$ ) de una variable aleatoria que toma los valores $\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ (en negro la $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de los valores que han aparecido en la muestra) . . . . .	61
2.11. Medias tipo Aumann de la $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de la distribución muestral de $X - 1$ (derecha, en línea negra) y de la distribución muestral de $1 - X$ (izquierda, en línea gris) . . . . .	62

# Índice de tablas

1.1.	Algunas posibles elecciones de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ basadas en elecciones para $W$ . . . . .	16
1.2.	Algunas posibles elecciones de $\theta$ basadas en elecciones para $W$ . . . . .	18
2.1.	Número de desintegraciones radiactivas de fondo observadas en intervalos temporales de 2 segundos (agrupadas) . . . . .	54



# Capítulo 1

## Introducción a los Números *Fuzzy* Aleatorios

En este capítulo se introducirán los conceptos de número *fuzzy* y número *fuzzy* aleatorio, la aritmética más usada para operar con los datos que toman valores de número *fuzzy* y una familia de métricas operativas.

Zadeh [46] introdujo los llamados **conjuntos *fuzzy*** como representación matemática de propiedades o restricciones cuya definición no implica que necesariamente deban cumplirse o no, sino que pueden satisfacerse con ‘cierto grado’. Por esta razón, los conjuntos *fuzzy* son especialmente útiles para modelizar y tratar la imprecisión y el razonamiento aproximado de tales propiedades o restricciones.

Diez años más tarde, y tras algunas aplicaciones relevantes de los conjuntos *fuzzy*, Zadeh [47] presentó la noción de **número *fuzzy*** en el contexto del estudio de variables lingüísticas en el ámbito de los ‘sistemas humanísticos’. Como aclaración del significado de este último término, Zadeh indicaba que “.. *Por un sistema humanístico entendemos un sistema cuyo comportamiento está influenciado fuertemente por el juicio, la percepción o las emociones humanas. Ejemplos de sistemas humanísticos son: los sistemas económicos, los sistemas políticos, los sistemas legislativos, los sistemas educativos, etc. También puede verse como un sistema humanístico un único individuo y el proceso de su pensamiento.*”

Además, en relación con las variables lingüísticas modelizadas mediante números *fuzzy*, Zadeh desarrolló un *principio de extensión* [47] con el objeto de adaptar el aparato matemático existente para el análisis de sistemas al tratamiento computacional de esas variables.

En este sentido, si el espacio de los números *fuzzy* se dota de una aritmética apropiada, junto con métricas oportunas entre ellos, se puede entender y manejar

como un espacio métrico más general que el habitual sobre el espacio euclídeo de dimensión 1. Y si esos números *fuzzy* se emplean para modelizar los ‘valores’ de ciertas características imprecisas, se plantea de forma natural la formalización en el contexto probabilístico de los mecanismos aleatorios que generan datos *fuzzy*.

Todas estas ideas se detallan a continuación.

## 1.1. Formalización de los números *fuzzy*

Los números *fuzzy* (difusos/borrosos) son una forma de representar cantidades intrínsecamente imprecisas y que, por tanto, no pueden expresarse fielmente mediante escalas numéricas. Estas cantidades suelen estar asociadas a valoraciones humanas para las que se carece de instrumentos de medición expresa, causa de tal imprecisión.

Si bien, como se ha señalado, los números *fuzzy* fueron introducidos por Zadeh como conjuntos fuzzy sobre el espacio euclídeo de dimensión 1, su formalización en el modo en que van a tratarse en este trabajo se debe mayoritariamente al trabajo de Nguyen [38] (ver también, por ejemplo, Dubois y Prade [11], Kaleva y Seikkala [23], Ming [32] y Puri y Ralescu [40]). Las condiciones que se han ido añadiendo para los números *fuzzy* han obedecido en buena parte a cuestiones relacionadas con su aritmética usual, que detallaremos en la sección siguiente.

La definición de número *fuzzy* (acotado) puede establecerse según dos enfoques equivalentes: el ‘vertical’ y el ‘horizontal’. Mientras que el segundo enfoque puede entenderse como una extensión de un intervalo real compacto, el primero correspondería a una extensión de su caracterización funcional a través de su función indicador.

**Definición 1.1.1.** [VERTICAL] *Un número fuzzy (acotado) se corresponde con una función  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  que es:*

- *semi-continua superiormente,*
- *cuasi-cóncava,*
- *normal (i.e., toma el valor 1 para al menos un valor en  $\mathbb{R}$ ) y*
- *su conjunto soporte topológico (que es la clausura del conjunto de los valores de  $\mathbb{R}$  cuya imagen es distinta de 0) se supone acotado.*

*Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , el valor  $\tilde{U}(x)$  se interpreta como el “grado de compatibilidad” de  $x$  con la propiedad definida por  $\tilde{U}$ .*

**Definición 1.1.2.** [HORIZONTAL] Un **número fuzzy** (acotado) se corresponde con una función  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , el conjunto  $\alpha$ -**nivel** (o  $\alpha$ -corte) definido por

$$\tilde{U}_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \tilde{U} \geq \alpha\} & \text{si } \alpha \in (0, 1] \\ \text{cl}\{x \in \mathbb{R} : \tilde{U} > 0\} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

es un intervalo compacto no vacío.

El espacio de todos los números *fuzzy* se representará como  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ .

**Observación 1.1.1.** La equivalencia de los dos enfoques anteriores se debe, por un lado, al hecho de que una función  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **semicontinua superiormente** si, o bien es continua o, si no lo es, sólo puede ‘saltar hacia arriba’, lo cual suele formalizarse (entre otras definiciones equivalentes) exigiendo que para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto anti-imagen  $f^{-1}([a, \infty)) = \{x \in \mathbb{E} : f(x) \geq a\}$  sea un conjunto cerrado. En consecuencia, la semicontinuidad superior de un número *fuzzy* equivale a la compacidad de todos sus  $\alpha$ -niveles, a lo que a veces se refiere en la literatura como un *conjunto fuzzy compacto*.

Por otro lado, se dice que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **cuasi-cóncava** si para todo  $\lambda \in [0, 1]$  y cualesquiera que sean  $x, y \in \mathbb{R}$  se cumple que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$ . Equivalentemente, se dice que  $f$  es cuasi-cóncava si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto anti-imagen  $f^{-1}([a, \infty))$  es un conjunto convexo. En efecto, si  $f$  es cuasi-cóncava, entonces cualesquiera que sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $\lambda \in [0, 1]$  y cualesquiera que sean  $x, y \in f^{-1}([a, \infty))$  (es decir,  $f(x) \geq a, f(y) \geq a$ ), se tiene que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \geq a$ , de manera que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in f^{-1}([a, \infty))$ . Recíprocamente, si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto anti-imagen  $f^{-1}([a, \infty))$  es un conjunto convexo, entonces para todo  $\lambda \in [0, 1]$  y cualesquiera que sean  $x, y \in \mathbb{R}$ , si se considera  $a = \min\{f(x), f(y)\}$ , se tiene que  $x, y \in f^{-1}([a, \infty))$ , de donde  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in f^{-1}([a, \infty))$ , de manera que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq a = \min\{f(x), f(y)\}$ . En consecuencia, la cuasi-concavidad de un número *fuzzy* equivale a la convexidad de todos sus  $\alpha$ -niveles, a lo que suele referirse en la literatura como un *conjunto fuzzy convexo*.

Conviene también reseñar que un número *fuzzy* queda caracterizado por su *representación* ínf/sup, según se establece en el resultado siguiente (cf., Goetschel y Voxman [17], Ming [32]):

**Proposición 1.1.1.** Dado  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , existen dos funciones  $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:

C.1)  $l$  y  $r$  son

- continuas por la izquierda en  $(0, 1]$ ,
- continuas por la derecha en  $0$ ,
- $l$  no decreciente y  $r$  no creciente en  $[0, 1]$ ,

C.2)  $l(1) \leq r(1)$ ,

y  $(l, r)$  es su representación ínf/sup (es decir,  $\tilde{U}_\alpha = [l(\alpha), r(\alpha)]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ).

Recíprocamente, si  $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones que satisfacen las Condiciones C.1 y C.2, entonces, existe un  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que  $(l, r)$  es su representación ínf/sup.

*Demostración.* En efecto, si  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ :

- Las funciones  $l$  y  $r$  que determinan su representación ínf/sup, es decir, tales que  $l(\alpha) = \inf \tilde{U}_\alpha$  y  $r(\alpha) = \sup \tilde{U}_\alpha$ , cumplen C.2 por ser  $\tilde{U}_1 = [l(1), r(1)] \neq \emptyset$ .
- Además, si  $\alpha \leq \alpha'$  se tiene que  $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{U}_{\alpha'}$ , de donde se concluye que  $l(\alpha) \leq l(\alpha')$  y  $r(\alpha) \geq r(\alpha')$  (es decir,  $l$  no decreciente y  $r$  no creciente en  $[0, 1]$ ).
- Por otra parte, si  $\alpha_n \uparrow \alpha \in (0, 1]$ , se cumple que  $l(\alpha_n) \uparrow$ ,  $r(\alpha_n) \downarrow$  y  $l(\alpha_n) \leq l(\alpha)$ ,  $r(\alpha_n) \geq r(\alpha)$ , de manera que existen los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$ . Además,  $\alpha_n \uparrow$  implica que  $\tilde{U}_{\alpha_n} \downarrow$ . Más concretamente, al tratarse de una sucesión de conjuntos decreciente, se sabe que:

$$[l(\alpha_n), r(\alpha_n)] = \tilde{U}_{\alpha_n} \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_n}.$$

Pero  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_n} = \tilde{U}_\alpha = [l(\alpha), r(\alpha)]$ , ya que  $\tilde{U}_\alpha \subset \tilde{U}_{\alpha_n}$  cualquiera que sea  $n$  y si  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_n}$  (es decir, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $\tilde{U}(x) \geq \alpha_n$ ), entonces,  $x \in \tilde{U}_\alpha$  (en caso contrario,  $\tilde{U}(x) < \alpha$  aseguraría que  $\varepsilon = \alpha - \tilde{U}(x) > 0$  y, al ser  $\alpha_n \uparrow \alpha$ , debería existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $n \geq n_0$  se cumpliera que  $\alpha - \alpha_n < \varepsilon = \alpha - \tilde{U}(x)$ , de donde  $\tilde{U}(x) < \alpha_n$  y, por lo tanto,  $x \notin \tilde{U}_{\alpha_n}$ , lo cual es absurdo).

Por otro lado,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [l(\alpha_n), r(\alpha_n)] = [\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n), \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)]$ , ya que cualquiera que sea  $n$ , se tiene que  $l(\alpha_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n)$  y  $r(\alpha_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$ , de modo que  $[\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n), \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)] \subset [l(\alpha_n), r(\alpha_n)]$ .

Además, si  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [l(\alpha_n), r(\alpha_n)]$  (es decir, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $l(\alpha_n) \leq x \leq r(\alpha_n)$ ), entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n) \leq x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$  (en caso contrario, o bien  $x < \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n)$ , en cuyo caso existiría  $n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que para

cualquier  $n \geq n'_0$  se cumpliera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n) - l(\alpha_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n) - x$ , de donde  $x < l(\alpha_n)$ , lo cual es absurdo, o bien  $x > \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$ , en cuyo caso existiría  $n''_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $n \geq n''_0$  se cumpliera que  $r(\alpha_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n) < x - \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$ , de donde  $x > r(\alpha_n)$ , lo cual es absurdo). Como consecuencia:

$$[l(\alpha), r(\alpha)] = \tilde{U}_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\alpha_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [l(\alpha_n), r(\alpha_n)] = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n), \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n) \right],$$

lo que confirma que  $l(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n)$  y  $r(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n)$ , es decir, que  $l$  y  $r$  son continuas por la izquierda en  $(0, 1]$ .

- La continuidad de  $l$  y  $r$  por la derecha de 0 se probaría con un razonamiento similar al anterior.

Recíprocamente, sean  $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones que satisfacen las Condiciones C.1 y C.2 del enunciado. Si se define  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de forma que

$$\tilde{U}(x) = \arg \sup_{\alpha \in [0, 1] : x \in [l(\alpha), r(\alpha)]} \alpha = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left\{ \min\{\alpha, \mathbb{1}_{[l(\alpha), r(\alpha)]}(x)\} \right\},$$

entonces, cualquiera que sea  $\alpha \in (0, 1]$  se tiene que:

- si  $\tilde{U}(x) < \alpha$ , se cumple que  $x \notin [l(\alpha), r(\alpha)]$ ;
- si  $\tilde{U}(x) > \alpha$ , se cumple que  $x \in [l(\alpha), r(\alpha)]$ ;
- si  $\tilde{U}(x) = \alpha$ , se cumple que  $x \in [l(\alpha), r(\alpha)]$ , ya que de no ser así se tendría que o bien  $x < l(\alpha)$  o  $x > r(\alpha)$ , y considerando una sucesión  $\alpha_n \uparrow \alpha$  se cumplirá que  $x \in [l(\alpha_n), r(\alpha_n)]$  para todo  $n$ , de donde por la continuidad por la izquierda de  $l$  y  $r$  puede garantizarse que  $l(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha_n) \leq x = \lim_{n \rightarrow \infty} r(\alpha_n) = r(\alpha)$ , con lo cual  $x \in [l(\alpha), r(\alpha)]$ ;

por lo que, en resumen,  $\tilde{U}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow l(\alpha) \leq x \leq r(\alpha)$ . Análogamente se probaría para  $\alpha = 0$ , habida cuenta de la continuidad por la derecha de 0 de  $l$  y  $r$ .  $\square$

Algunos autores eliminan la condición de compacidad (en realidad, la condición de acotación) del soporte topológico de los números *fuzzy*, si bien la mayoría de los resultados y estudios estadísticos apenas quedarían afectados por la eliminación de dicha suposición. Desde una perspectiva práctica, es muy habitual que la condición de semicontinuidad superior se refuerce considerando funciones continuas.

Un ejemplo simple y operativo de número *fuzzy* son los *números fuzzy triangulares*, una clase muy usada por su simplicidad.

**Ejemplo 1.1.1.** [NÚMEROS FUZZY TRIANGULARES] Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b \leq c$ . Se define el número fuzzy triangular  $\text{Tri}(a, b, c) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  con ‘vértice’  $b$  y ‘extremos’ izquierdo y derecho  $a$  y  $c$ , respectivamente, (con  $a \leq b \leq c$ ) como el número fuzzy con versión vertical

$$\text{Tri}(a, b, c) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a} & \text{si } x \in [a, b] \\ \frac{c - x}{c - b} & \text{si } x \in (b, c] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(ver Figura 1.1) y con versión horizontal tal que para cada  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$(\text{Tri}(a, b, c))_\alpha = [a + \alpha(b - a), c + \alpha(b - c)].$$

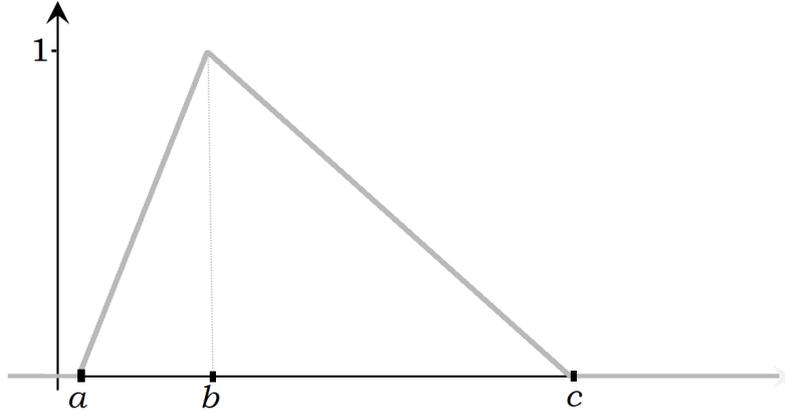


Figura 1.1: Representación gráfica del número triangular  $\text{Tri}(a, b, c)$

A pesar de la facilidad de programación, uso e interpretación que tienen los números *fuzzy* triangulares, se comprobará más adelante que para algunos problemas muy específicos no siempre suponen la elección más oportuna.

## 1.2. Aritmética y métricas entre números *fuzzy*

En su introducción de los números *fuzzy* para el estudio de las variables lingüísticas, Zadeh [47] estableció el llamado *principio de extensión* con el objeto de extender el dominio de una función o de una relación sobre conjuntos clásicos a conjuntos *fuzzy*. El fin último de esta extensión era, entre otros, el desarrollo de una aritmética entre números *fuzzy*, para poder trabajar con las variables lingüísticas de una forma lo más parecida posible a como se trabaja con las variables numéricas.

Particularizado al caso de una función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , el **principio de extensión de Zadeh** daría lugar a la **imagen inducida por  $f$**  de  $(\tilde{U}, \tilde{V})$  (que también podría entenderse como la imagen inducida por  $f$  del producto cartesiano fuzzy  $\tilde{U} \times \tilde{V}$ , según la definición del mismo dada por Zadeh, que correspondería a

$$f(\tilde{U}, \tilde{V})(z) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x,y)=z} (\tilde{U} \times \tilde{V})(x, y) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x,y)=z} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\}.$$

Se trata, de hecho, de una extensión inmediata de la extensión intervalar natural (la imagen del producto cartesiano). Si se denota por  $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$  el espacio de los intervalos compactos no vacíos en  $\mathbb{R}$ , para  $K, K' \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$  la imagen inducida por  $f$  de  $K, K'$  vendría dada por:

$$f(K, K') = \{f(x, y) : (x, y) \in K \times K'\},$$

que equivale a

$$\mathbb{1}_{f(K, K')}(z) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x,y)=z} \min\{\mathbb{1}_K(x), \mathbb{1}_{K'}(y)\}.$$

La aritmética usual entre números *fuzzy* involucra dos operaciones básicas para su tratamiento estadístico: la suma y el producto por escalares. Sobre la base del principio de extensión de Zadeh, estas operaciones se definen a continuación en su versión funcional.

**Definición 1.2.1.** Sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ . La **suma** de  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  es el número fuzzy  $\tilde{U} + \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  dado por:

$$(\tilde{U} + \tilde{V})(z) = \sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\}.$$

**Definición 1.2.2.** Sean  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $k \in \mathbb{R}$ . El **producto de  $\tilde{U}$  por el escalar  $k$**  es el número fuzzy  $k \cdot \tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  definido por:

$$k \cdot \tilde{U}(y) = \sup_{\{x \in \mathbb{R} : y=kx\}} \tilde{U}(x) = \begin{cases} \tilde{U}\left(\frac{y}{k}\right) & \text{si } k \neq 0 \\ \mathbb{1}_{\{0\}} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Las definiciones funcionales precedentes equivalen a las extensiones nivel a nivel de la aritmética intervalar usual (ver, por ejemplo, Moore [37]), como lo prueban las dos proposiciones siguientes, basadas en resultados establecidos por Nguyen [38].

**Proposición 1.2.1.** Sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ . La suma de  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  es el número fuzzy  $\tilde{U} + \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que, para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , el  $\alpha$ -nivel de  $\tilde{U} + \tilde{V}$  es la suma de Minkowski de  $\tilde{U}_\alpha$  y  $\tilde{V}_\alpha$ , es decir:

$$(\tilde{U} + \tilde{V})_\alpha = \tilde{U}_\alpha + \tilde{V}_\alpha,$$

lo cual equivale a que

$$(\tilde{U} + \tilde{V})_\alpha = \{x + y : x \in \tilde{U}_\alpha, y \in \tilde{V}_\alpha\} = [\inf \tilde{U}_\alpha + \inf \tilde{V}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha + \sup \tilde{V}_\alpha].$$

*Demostración.* En efecto, vamos a probar la primera igualdad, puesto que la segunda resultaría trivial a partir de ella.

- Si  $z \in \tilde{U}_\alpha + \tilde{V}_\alpha$ , entonces deben existir  $x_z \in \tilde{U}_\alpha, y_z \in \tilde{V}_\alpha$  tales que  $x_z + y_z = z$ . Como  $\tilde{U}(x_z) \geq \alpha$  y  $\tilde{V}(y_z) \geq \alpha$ , se tiene que

$$\sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\} \geq \min\{\tilde{U}(x_z), \tilde{V}(y_z)\} \geq \alpha,$$

de donde  $z \in (\tilde{U} + \tilde{V})_\alpha$ .

- Recíprocamente, si  $z \in (\tilde{U} + \tilde{V})_\alpha$ , se tiene que

$$(\tilde{U} + \tilde{V})(z) = \sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\} \geq \alpha.$$

- En el caso en que  $(\tilde{U} + \tilde{V})(z) > \alpha$ , deben existir  $x'_z \in \tilde{U}_\alpha, y'_z \in \tilde{V}_\alpha$  para los que  $x'_z + y'_z = z$  y tales que

$$\sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\} \geq \min\{\tilde{U}(x'_z), \tilde{V}(y'_z)\} > \alpha,$$

de donde  $x'_z \in \tilde{U}_\alpha, y'_z \in \tilde{V}_\alpha$ . En consecuencia,  $z = x'_z + y'_z \in \tilde{U}_\alpha + \tilde{V}_\alpha$ .

- En el caso en que  $(\tilde{U} + \tilde{V})(z) = \alpha$ , si se define la función  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g(x, y) = \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\}$ , se trata de una función no negativa, que se anula fuera del conjunto compacto  $\tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0$  y tal que para todo  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que  $g^{-1}([\alpha, 1]) = \tilde{U}_\alpha \times \tilde{V}_\alpha$ , que es obviamente un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^2$ . Es decir,  $g$  es semicontinua superiormente, por lo cual el supremo de  $g$  en el conjunto cerrado  $\{(x, y) : x + y = z\} \cap (\tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0)$  es máximo. Por lo tanto, deben existir  $x''_z$  e  $y''_z$  para los que  $x''_z + y''_z = z$  y tales que

$$g(x''_z, y''_z) = \sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\} \cap (\tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0)} g(x, y) = \sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} g(x, y),$$

de donde

$$\min\{\tilde{U}(x''_z), \tilde{V}(y''_z)\} = \sup_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=z\}} \min\{\tilde{U}(x), \tilde{V}(y)\} = (\tilde{U} + \tilde{V})(z) = \alpha.$$

En consecuencia,  $\tilde{U}(x''_z) \geq \alpha$  y  $\tilde{V}(y''_z) \geq \alpha$ , de modo que  $z = x''_z + y''_z \in \tilde{U}_\alpha + \tilde{V}_\alpha$ .  $\square$

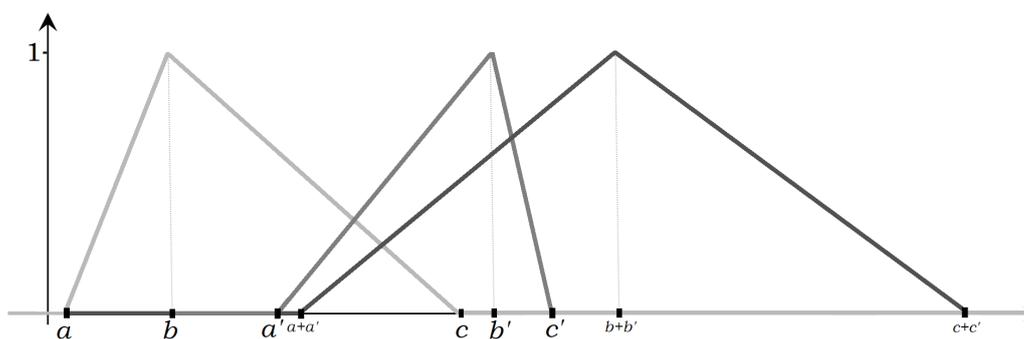


Figura 1.2: Representación gráfica de la suma de dos números *fuzzy* triangulares

Como ejemplo de la suma de números *fuzzy*, la Figura 1.2 ilustra la suma de dos números triangulares.

**Proposición 1.2.2.** Sean  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $k \in \mathbb{R}$ . El producto de  $\tilde{U}$  y  $k$  es el número *fuzzy*  $k \cdot \tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , el  $\alpha$ -nivel de  $k \cdot \tilde{U}$  es el producto de  $k$  por  $\tilde{U}_\alpha$  según la aritmética intervalar usual, es decir:

$$(k \cdot \tilde{U})_\alpha = k \cdot \tilde{U}_\alpha,$$

lo cual equivale a que

$$(k \cdot \tilde{U})_\alpha = \{k \cdot x : x \in \tilde{U}_\alpha\} = \begin{cases} [k \cdot \inf(\tilde{U})_\alpha, k \cdot \sup(\tilde{U})_\alpha] & \text{si } k \geq 0 \\ [k \cdot \sup(\tilde{U})_\alpha, k \cdot \inf(\tilde{U})_\alpha] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

*Demostración.* En efecto, vamos a probar la primera igualdad, puesto que la segunda resultaría trivial a partir de ella.

Si  $k = 0$ , el resultado es inmediato puesto que  $0 \cdot \tilde{U} = \mathbb{1}_{\{0\}}$ , de donde cualquiera que sea  $\alpha \in [0, 1]$  se tiene que  $(0 \cdot \tilde{U})_\alpha = \{0\} = [0, 0] = 0 \cdot \tilde{U}_\alpha$ .

Si  $k \neq 0$ , entonces

$$(k \cdot \tilde{U})_\alpha = \{y \in \mathbb{R} : (k \cdot \tilde{U})(y) \geq \alpha\} = \{y \in \mathbb{R} : \tilde{U}(y/k) \geq \alpha\}.$$

- Si  $y \in k \cdot \tilde{U}_\alpha$ , entonces  $x_y = y/k \in \tilde{U}_\alpha$ . Como  $\tilde{U}(x_y) \geq \alpha$ , se tiene que  $y \in (k \cdot \tilde{U})_\alpha$ .
- Recíprocamente, si  $y \in (k \cdot \tilde{U})_\alpha$ , se tiene que  $\tilde{U}(y/k) \geq \alpha$ , de donde  $y/k \in \tilde{U}_\alpha$  y, por lo tanto,  $y = k \cdot (y/k) \in k \cdot \tilde{U}_\alpha$ .  $\square$

Como ejemplo del producto de números *fuzzy* por escalares, la Figura 1.3 ilustra el producto de  $k = 2$  por un número triangular.

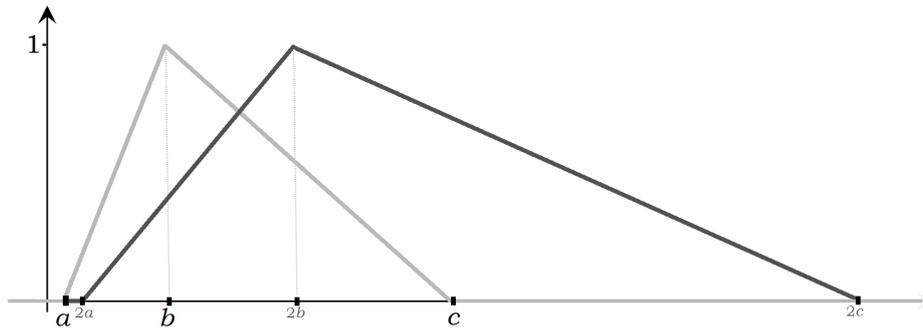


Figura 1.3: Representación gráfica del producto por  $k = 2$  de un número *fuzzy* triangular

**Observación 1.2.1.** Es importante señalar que si bien los números *fuzzy* pueden formalizarse de manera funcional, la aritmética basada en el principio de extensión de Zadeh no se corresponde con la aritmética funcional usual. De hecho, muy a menudo la suma y el producto por escalar funcionales no darían lugar a números *fuzzy* (como ocurriría en los ejemplos considerados en las Figuras 1.2 y 1.3). Además, el significado de las cantidades imprecisas resultantes de las operaciones se perdería. No obstante, como se comentará más tarde, la aritmética usual de números *fuzzy* junto con la adopción de ciertas métricas entre ellos permite el encaje isométrico del espacio de números *fuzzy* en un cono convexo de un espacio de Hilbert de funciones con la aritmética funcional usual.

**Observación 1.2.2.** Cuando el espacio  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  se dota de la aritmética usual entre números *fuzzy*, tiene estructura semilineal, ya que  $\tilde{U} + (-1) \cdot \tilde{U} \neq \mathbb{1}_{\{0\}}$  = elemento neutro de la suma de números *fuzzy*. Por ejemplo, si  $\tilde{U} = \text{Tri}(a, b, c)$ , entonces  $\tilde{U} + (-1) \cdot \tilde{U} = \text{Tri}(a, b, c) + \text{Tri}(-c, -b, -a) = \text{Tri}(a - c, 0, c - a)$ , que sería un número *fuzzy* triangular simétrico respecto de 0.

Como consecuencia, no es posible encontrar un operador **diferencia** que simultáneamente esté bien definido, en el sentido de que sea un número *fuzzy* para cada par de números *fuzzy* involucrados, y que conserve una de las propiedades más conocidas en relación con la suma de números reales (más concretamente,  $\tilde{U} + (\tilde{V} - \tilde{U}) = \tilde{V}$ ).

La introducción de métricas en el espacio de los números *fuzzy* busca, por un lado, resolver algunos de los problemas relacionados con la no linealidad de  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), +, \cdot)$ , siempre que en el estudio considerado la diferencia entre dos números *fuzzy* pueda sustituirse por una distancia porque el ‘signo’ de su ‘diferencia’ sea irrelevante (por ejemplo, es indistinto verificar la igualdad de dos números *fuzzy* y verificar que una distancia entre ellos es nula). Por otro lado, algunas técnicas del análisis de números

*fuzzy* extienden procedimientos del caso real que involucran distancias (por ejemplo, el método de mínimos cuadrados).

El empleo de métricas basadas exclusivamente en la caracterización  $\inf/\sup$  de los números *fuzzy* puede resultar algo pobre, ya que las distancias tendrían en cuenta exclusivamente las distancias euclídeas entre los ínfimos y entre los supremos de los  $\alpha$ -niveles. Por otro lado, si se utilizan métricas tipo  $L^p$  (con  $p \neq 2$ ) o tipo  $L^\infty$  podrían perderse algunas ventajas de interés, como es el encaje isométrico del espacio métrico con la aritmética que acaba de describirse dentro de un espacio de Hilbert de funciones o la separabilidad de dicho espacio.

En este trabajo va a considerarse una familia de métricas (o métrica generalizada) de tipo  $L^2$  introducida por Bertoluzza *et al.* [3], y que admite dos versiones equivalentes: una más intuitiva en cuanto a la elección oportuna de elementos de esa familia y otra más sencilla de manejar en la mayoría de los desarrollos. Esta métrica generalizada se basa en distancias entre  $\alpha$ -niveles que involucran a su vez distancias (más concretamente, cuadrados de distancias euclídeas) entre las combinaciones lineales convexas de esos niveles intervalares.

Para interpretar bien la métrica generalizada, puede comenzarse exponiendo su versión intervalar.

**Definición 1.2.3.** Sea  $W$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  y formalizada como una medida de probabilidad asociada a una distribución no degenerada. Sean  $K, K' \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ , y sea  $K^{[t]} := t \cdot \sup K + (1 - t) \cdot \inf K$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . Se define la ***W*-distancia entre  $K$  y  $K'$**  como

$$d_W(K, K') = \sqrt{\int_{[0,1]} |K^{[t]} - K'^{[t]}|^2 dW(t)}.$$

**Observación 1.2.3.** Aunque  $W$  esté asociada formalmente a una medida de probabilidad, no tiene ningún propósito estocástico y simplemente determina la ponderación de las distintas combinaciones lineales convexas de los intervalos. La elección de  $W$  da lugar a distintas distancias. Por ejemplo, en el caso de tomar  $W \equiv \mathcal{U}_{\{0,1\}}$  se obtiene que  $d_W = \delta_2$ , con  $\delta_2(K, K') = \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \frac{|\inf K - \inf K'|^2}{2} + \frac{|\sup K - \sup K'|^2}{2} \right] dt}$ , que es la distancia  $L^2$  entre intervalos introducida (en un contexto más amplio) por Vitale [45].

Para extender este concepto a  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  se considera una media ponderada de las distancias  $d_W$  entre los  $\alpha$ -niveles de los números *fuzzy* siguiendo, entre otras, las ideas de Klement *et al.* [25] y Diamond y Kloeden [10].

**Definición 1.2.4.** Sea  $W$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una distribución no degenerada, y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el mismo espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . Si  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se define la  **$(W, \varphi)$ -distancia entre  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$**  como

$$D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sqrt{\int_{[0,1]} [d_W(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} = \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} |\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha)}.$$

La Figura 1.4 muestra la distancia euclídea entre dos puntos ‘correspondientes’ (combinación lineal convexa con  $t = 0.5$ ) de los  $\alpha$ -niveles cuyo cuadrado se integra en  $D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V})$ .

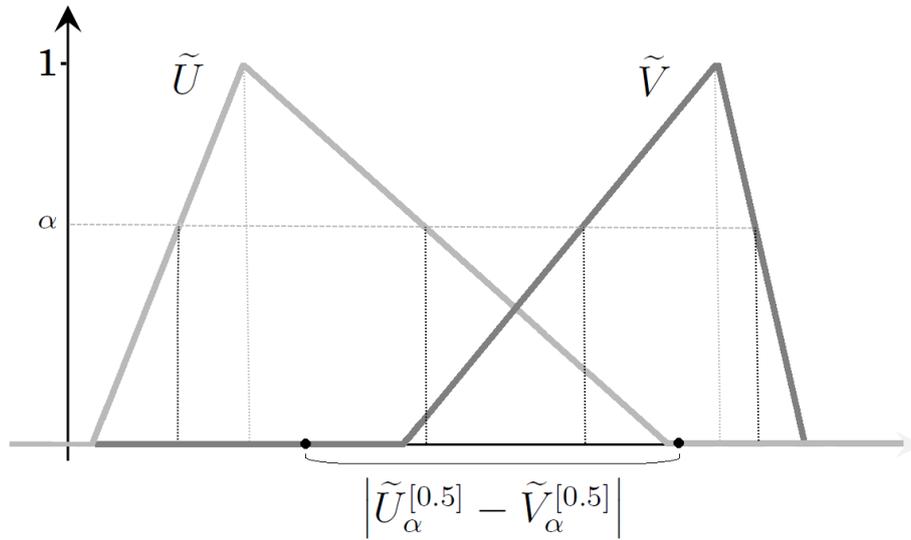


Figura 1.4: Ejemplo de distancia euclídea entre dos puntos ‘correspondientes’ de los  $\alpha$ -niveles en la  $(W, \varphi)$ -distancia

**Observación 1.2.4.** De nuevo, al igual que ocurría para  $W$ ,  $\varphi$  no tiene ni un propósito estocástico ni debe interpretarse en términos probabilísticos. La elección de  $\varphi$  se llevará a cabo atendiendo a la ponderación que quiera asignarse a la ‘importancia’ de los distintos  $\alpha$ -niveles. Así, por ejemplo:

- si  $\varphi \equiv \beta(1, 1) \equiv \mathcal{U}_{[0,1]}$ , se asigna la misma ‘importancia’ a todos los niveles;
- si  $\varphi = \beta(1, p)$  con  $p \gg 1$  se asigna más ‘importancia’ a un  $\alpha$ -nivel cuanto menor es  $\alpha$  (más concretamente, se atribuye mayor ‘influencia’ a los intervalos con valores menos compatibles con los números *fuzzy* involucrados);

- Si  $\varphi = \beta(p, 1)$  con  $p \gg 1$  se asigna más ‘importancia’ a un  $\alpha$ -nivel cuanto mayor es  $\alpha$  (más concretamente, se atribuye mayor ‘influencia’ a los intervalos con valores más compatibles con los números *fuzzy* involucrados).

La verificación de las propiedades métricas de la  $(W, \varphi)$ -distancia se analiza en el resultado siguiente.

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $W$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una distribución no degenerada, y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el mismo espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . La aplicación  $D_W^\varphi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  define una métrica sobre  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* En efecto, dado que:

- *No negatividad:* trivial por la definición de  $D_W^\varphi$ .
- *Simetría:* trivial por la definición de  $D_W^\varphi$ .
- *Desigualdad triangular:* a partir de la aplicación de la desigualdad integral de Minkowski para la 2-norma, cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{T} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) &= \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} |\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha)} \\ &= \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} \left| (\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{T}_\alpha^{[t]}) + (\tilde{T}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}) \right|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha)} \\ &\leq \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} |\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{T}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha)} \\ &\quad + \sqrt{\int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} |\tilde{T}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha)} = D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{T}) + D_W^\varphi(\tilde{T}, \tilde{V}). \end{aligned}$$

- *Indistinguibilidad:* si para ciertos  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  se cumple que  $D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = 0$ , entonces, como  $W$  se ha supuesto que es una distribución no degenerada:

$$D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = 0 \Leftrightarrow [D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V})]^2 = 0 \Leftrightarrow \int_{[0,1]} |\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) \stackrel{c.s.[\varphi]}{=} 0.$$

Como, además,  $\varphi$  está asociada con una distribución absolutamente continua y el argumento de la integral es continuo por la izquierda para  $\alpha \in (0, 1]$  y continuo por la derecha para  $\alpha = 0$ , entonces, para todo  $\alpha \in [0, 1]$  debe cumplirse que  $\int_{[0,1]} |\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2 dW(t) = 0$ .

Para un  $\alpha \in [0, 1]$  arbitrario, la igualdad anterior implica que  $|\tilde{U}_\alpha^{[t]} - \tilde{V}_\alpha^{[t]}|^2$  se anule *c.s.*  $[W]$ , de modo que puede garantizarse la existencia de dos valores  $t_1(\alpha), t_2(\alpha) \in [0, 1]$  con  $t_1(\alpha) < t_2(\alpha)$  y tales que  $|\tilde{U}_\alpha^{[t_1(\alpha)]} - \tilde{V}_\alpha^{[t_1(\alpha)]}|^2 = 0$  y  $|\tilde{U}_\alpha^{[t_2(\alpha)]} - \tilde{V}_\alpha^{[t_2(\alpha)]}|^2 = 0$ , es decir:

$$\begin{cases} t_1(\alpha)(\inf(\tilde{U}_\alpha) - \inf(\tilde{V}_\alpha)) + (1 - t_1(\alpha))(\sup(\tilde{U}_\alpha) - \sup(\tilde{V}_\alpha)) = 0 \\ t_2(\alpha)(\inf(\tilde{U}_\alpha) - \inf(\tilde{V}_\alpha)) + (1 - t_2(\alpha))(\sup(\tilde{U}_\alpha) - \sup(\tilde{V}_\alpha)) = 0 \end{cases},$$

siendo la única solución de este sistema

$$\inf(\tilde{U}_\alpha) = \inf(\tilde{V}_\alpha), \quad \sup(\tilde{U}_\alpha) = \sup(\tilde{V}_\alpha),$$

que indica  $\tilde{U}_\alpha = \tilde{V}_\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , de donde se concluye que  $\tilde{U} = \tilde{V}$ .  $\square$

La métrica  $D_W^\varphi$  admite expresiones equivalentes que en determinados estudios resultan más útiles y manejables. La expresión considerada hasta el momento, que sigue la definición original de Bertoluzza *et al.* [3], es la más sencilla de interpretar en términos de la elección de  $W$  para ponderar las distintas combinaciones lineales convexas de los extremos de los  $\alpha$ -niveles (que pueden hacerse corresponder biunívocamente). Sin embargo, desde una perspectiva computacional, como con fines de simulación e incluso para desarrollos teóricos algunas versiones equivalentes suelen ser más apropiadas. En Casals *et al.* [6] se detallan estas equivalencias.

Como ocurre eventualmente en Matemáticas, una de esas versiones equivalentes de la métrica consiste en una particularización que la caracteriza. De este modo,  $D_W^\varphi$  puede caracterizarse totalmente (ver Bertoluzza *et al.* [3], Lubiano *et al.* [29]) mediante la métrica  $D_{W_\lambda}^\varphi$  donde  $W_\lambda$  es una medida de probabilidad asociada a una distribución discreta con soporte en los dos extremos, 0 y 1, y un punto intermedio (a menudo, 0.5). Más concretamente, denotando por  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  con  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_3 > 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , se define  $W_\lambda(0) = \lambda_1$ ,  $W_\lambda(t_{W_\lambda}) = \lambda_2$  y  $W_\lambda(1) = \lambda_3$  para cierto  $t_{W_\lambda} \in (0, 1)$  (a menudo,  $t_{W_\lambda} = 0.5$ ). Se cumple, entonces, que:

$$D_{W_\lambda}^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sqrt{\int_{[0,1]} \left( \lambda_1 [\tilde{U}_\alpha^{[1]} - \tilde{V}_\alpha^{[1]}]^2 + \lambda_2 [\tilde{U}_\alpha^{[t_{W_\lambda}]} - \tilde{V}_\alpha^{[t_{W_\lambda}]}]^2 + \lambda_3 [\tilde{U}_\alpha^{[0]} - \tilde{V}_\alpha^{[0]}]^2 \right) d\varphi(\alpha)}.$$

Que  $D_{W_\lambda}^\varphi$  es un caso particular de  $D_W^\varphi$  es evidente. La equivalencia entre ambas se prueba a continuación.

**Proposición 1.2.4.** Sean  $W$  y  $\varphi$  medidas de probabilidad sobre el espacio medible  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociadas a una distribución no degenerada y a una distribución continua con soporte en  $[0, 1]$ , respectivamente. Existe una medida de probabilidad  $W_\lambda$  sobre  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociada a una distribución discreta con soporte en un conjunto de tres (o dos) elementos que incluye los valores 0 y 1, tal que

$$D_W^\varphi = D_{W_\lambda}^\varphi.$$

*Demostración.* En efecto, si se define  $t_W = \int_{[0,1]} t dW(t)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  con

$$\lambda_1 = \frac{\int_{[0,1]} (t - t_W)^2 dW(t)}{1 - t_W}, \quad \lambda_2 = \frac{\int_{[0,1]} t(1 - t) dW(t)}{t_W(1 - t_W)}, \quad \lambda_3 = \frac{\int_{[0,1]} (t - t_W)^2 dW(t)}{t_W},$$

entonces,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 > 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  y, cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se cumple que

$$\begin{aligned} (D_{W_\lambda}^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2 &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \left[ \frac{(t - t_W)^2}{1 - t_W} (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha)^2 \right. \\ &+ \frac{t(1 - t)}{t_W(1 - t_W)} \left\{ t_W (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha) + (1 - t_W) (\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha) \right\}^2 \\ &\quad \left. + \frac{(t - t_W)^2}{t_W} (\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha)^2 \right] dW(t) d\varphi(\alpha) \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \left[ t^2 (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha)^2 \right. \\ &\quad + 2t(1 - t) (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha) (\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha) \\ &\quad \left. + (1 - t)^2 (\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha)^2 \right] dW(t) d\varphi(\alpha) = (D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2. \quad \square \end{aligned}$$

Si  $t_W = 0.5$  (como ocurre, por ejemplo, cuando  $W$  está asociada con una distribución simétrica con respecto de  $t = 0.5$ , lo que constituye una opción bastante razonable), se tiene que  $\tilde{U}_\alpha^{[t_W]} = \text{mid } \tilde{U}_\alpha = \text{punto medio de } \tilde{U}_\alpha = (\inf \tilde{U}_\alpha + \sup \tilde{U}_\alpha)/2$ .

Aunque elegir  $W$  es más intuitivo que elegir el vector de ponderación  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , la última puede ser a veces más fácil de manejar. Por ello, se recogen en la Tabla 1.1 algunas de las correspondencias entre  $W$  y  $\lambda$  siguiendo la Proposición 1.2.4.

$W$	$\lambda$
$\beta(p, q)$	$\left( \frac{p}{(p+q)(p+q+1)}, \frac{p+q}{p+q+1}, \frac{q}{(p+q)(p+q+1)} \right)$
$\mathcal{U}_{\{0,1/k, \dots, (k-1)/k, 1\}}$	$\left( \frac{k+2}{6k}, \frac{2k-2}{3k}, \frac{k+2}{6k} \right)$
$\frac{\text{Binomial}(k, p)}{k}$	$\left( \frac{p}{k}, \frac{k-1}{k}, \frac{1-p}{k} \right)$

Tabla 1.1: Algunas posibles elecciones de  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  basadas en elecciones para  $W$

Otra versión equivalente de la métrica  $D_W^\varphi$  es la que más va a emplearse en los desarrollos de este trabajo. Esta versión se basa en la *representación mid/spr de un número fuzzy*. Por la representación mid/spr va a entenderse la que determinan el punto medio (centro) y la semiamplitud (radio) del  $\alpha$ -nivel, es decir,  $\tilde{U}_\alpha = [\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{U}_\alpha, \text{mid } \tilde{U}_\alpha + \text{spr } \tilde{U}_\alpha]$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , con  $\text{mid } \tilde{U}_\alpha = (\inf \tilde{U}_\alpha + \sup \tilde{U}_\alpha)/2$  y  $\text{spr } \tilde{U}_\alpha = (\sup \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{U}_\alpha)/2$ . Conviene señalar que, a diferencia de la representación ínf/sup, no existe un resultado caracterizador de un número *fuzzy* como el que establece la Proposición 1.1.1 para la representación mid/spr. En otras palabras, y en contraste con lo que ocurre para el caso intervalar, no pueden determinarse condiciones necesarias y suficientes separadas para las funciones mid y spr de manera que caractericen un número *fuzzy* (en realidad, sí podrían determinarse para spr, pero no para mid).

Sobre la base de la métrica presentada en Gil *et al.* [15] para el caso intervalar (ver también Trutschnig *et al.* [42] para el caso más general de valores *fuzzy* de espacios euclídeos de dimensión finita), se puede establecer la métrica siguiente:

**Definición 1.2.5.** Sea  $\theta \in (0, 1]$  y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . Si  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se define la  **$(\theta, \varphi)$ -distancia entre  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$**  como

$$D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sqrt{\int_{[0,1]} \left( [\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha]^2 + \theta [\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha]^2 \right) d\varphi(\alpha)}.$$

La equivalencia entre  $D_W^\varphi$  y  $D_\theta^\varphi$  se prueba a continuación.

**Proposición 1.2.5.** *Sea  $\varphi$  medida de probabilidad sobre el espacio medible  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociada a una distribución continua con soporte en  $[0, 1]$ . Si  $W$  es una medida de probabilidad sobre el espacio medible  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociada a una distribución no degenerada, entonces existe un valor  $\theta_W \in (0, 1]$  tal que  $D_{\theta_W}^\varphi = D_W^\varphi$ . Recíprocamente, si  $\theta \in (0, 1]$ , entonces existe una medida de probabilidad  $W_\theta$  sobre  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociada a una distribución no degenerada tal que  $D_{W_\theta}^\varphi = D_\theta^\varphi$ .*

*Demostración.* En efecto, si  $W$  es una medida de probabilidad sobre el espacio medible  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  asociada a una distribución no degenerada, entonces si se definen  $t_W = \int_{[0,1]} t dW(t)$  y  $\theta_W = 4 \int_{[0,1]} (t - t_W)^2 dW(t)$ , cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se cumple que

$$\begin{aligned} (D_{\theta_W}^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2 &= \int_{[0,1]} \left( [(\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha)/2 + (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha)/2]^2 \right. \\ &+ 4 \int_{[0,1]} (t - t_W)^2 dW(t) \left. [ -(\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha)/2 + (\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha)/2 ]^2 \right) d\varphi(\alpha) \\ &= \int_{[0,1]} \left[ \int_{[0,1]} |t(\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha) + (1-t)(\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha)|^2 dW(t) \right] d\varphi(\alpha) \\ &= (D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2. \end{aligned}$$

Si  $\theta \in (0, 1]$ , entonces si se define  $\lambda_\theta = (\theta/2, 1 - \theta, \theta/2)$ , cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se cumple que  $t_{W_{\lambda_\theta}} = \int_{[0,1]} t dW_{\lambda_\theta}(t) = 1/2$  y

$$\begin{aligned} (D_{W_{\lambda_\theta}}^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2 &= \int_{[0,1]} \left( \theta [\sup \tilde{U}_\alpha - \sup \tilde{V}_\alpha]^2 / 2 + (1 - \theta) [\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha]^2 \right. \\ &\left. + \theta [\inf \tilde{U}_\alpha - \inf \tilde{V}_\alpha]^2 / 2 \right) d\varphi(\alpha) = (D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}))^2. \quad \square \end{aligned}$$

En su versión  $D_\theta^\varphi$ , el parámetro  $\theta$  permite ponderar, para cada  $\alpha$ , el efecto de la desviación en ‘forma’ o ‘imprecisión’ (a través de las desviaciones entre las semiamplitudes) frente al efecto de la desviación en ‘posición’. Si bien el rango de valores de  $\theta$  podría extenderse teóricamente a  $(0, \infty)$ , en la práctica parece razonable restringirse a  $(0, 1]$ , de modo que para cuantificar la distancia entre dos números *fuzzy* no se le conceda más relevancia a la desviación en forma que a la desviación en localización.

En la Tabla 1.2 se recogen algunas de las correspondencias entre  $W$  y  $\theta$  siguiendo la Proposición 1.2.5.

$W$	$\theta$
$\beta(p, q)$	$\frac{4pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
$\mathcal{U}_{\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}}$	$\frac{k+2}{3k}$
$\frac{\text{Binomial}(k, p)}{k}$	$\frac{4p(1-p)}{k}$

Tabla 1.2: Algunas posibles elecciones de  $\theta$  basadas en elecciones para  $W$

A continuación se enunciarán propiedades relevantes de la métrica que va a considerarse en el trabajo. Se formularán en su versión  $D_\theta^\varphi$ , si bien podría hacerse indistintamente en cualquiera de sus expresiones equivalentes.

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $\theta \in (0, 1]$  y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . La métrica  $D_\theta^\varphi$  cumple las propiedades siguientes:*

- i)  $D_\theta^\varphi$  es invariante bajo rotaciones, es decir,  $D_W^\varphi((-1) \cdot \tilde{U}, (-1) \cdot \tilde{V}) = D_W^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V})$  cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ .*
- ii)  $D_\theta^\varphi$  es invariante bajo traslaciones:  $D_\theta^\varphi(\tilde{U} + \tilde{T}, \tilde{V} + \tilde{T}) = D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V})$  cualesquiera que sean  $\tilde{T}, \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ .*
- iii) Para un  $\varphi$  fijo, todas las métricas  $D_\theta^\varphi$  son topológicamente equivalentes.*
- iv)  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi)$  es un espacio métrico separable.*

*Demostración.* La comprobación de las propiedades en *i)* e *ii)* es trivial ya que, cualesquiera que sean  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\tilde{T}, \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se cumple que:

$$\text{mid}((-1) \cdot \tilde{U})_\alpha = -\text{mid } \tilde{U}_\alpha, \quad \text{spr}((-1) \cdot \tilde{U})_\alpha = \text{spr } \tilde{U}_\alpha,$$

$$\text{mid}(\tilde{U} + \tilde{T})_\alpha = \text{mid } \tilde{U}_\alpha + \text{mid } \tilde{T}_\alpha, \quad \text{spr}(\tilde{U} + \tilde{T})_\alpha = \text{spr } \tilde{U}_\alpha + \text{spr } \tilde{T}_\alpha.$$

- Por otro lado, para probar la equivalencia topológica en *iii*), basta con verificar que, para todo  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ :

$$\sqrt{\theta} \cdot D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) \leq D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) \leq D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}).$$

En efecto, para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  se cumple que, si  $\delta_2$  es la métrica  $L^2$  definida en la Observación 1.2.3:

$$\begin{aligned} \theta \cdot [\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 &= \theta \cdot \left| \text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha \right|^2 + \theta \cdot \left| \text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha \right|^2 \\ &\leq \left| \text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha \right|^2 + \theta \cdot \left| \text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha \right|^2 \\ &\leq \left| \text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha \right|^2 + \left| \text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha \right|^2 = [\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\sqrt{\theta} \cdot \delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) \leq \sqrt{\left| \text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha \right|^2 + \theta \cdot \left| \text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha \right|^2} \leq \delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha).$$

Como se satisface que

$$\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) = \sqrt{\left| \text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha \right|^2 + \left| \text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha \right|^2},$$

y

$$D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sqrt{\int_{[0,1]} [\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)},$$

entonces:

$$\sqrt{\theta} \cdot D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) \leq D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) \leq D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}).$$

- Finalmente, para verificar la separabilidad del espacio métrico  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi)$ , enunciada en *iv*), se va a ver previamente que  $D_1^\varphi$  es topológicamente equivalente a la métrica  $d_2^\varphi$  definida como la  $\varphi$ -extensión de la métrica  $d_2$  introducida por Klement *et al.* [25] de forma que, cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ :

$$d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) = \sqrt{\int_{[0,1]} [d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)},$$

donde  $d_H$  es la conocida distancia de Hausdorff del caso unidimensional en  $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}) \times \mathcal{K}_c(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$  que, en este caso, viene dada para  $K, K' \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$  por:

$$\begin{aligned} d_H(K, K') &= \text{máx}\{|\text{ínf } A - \text{ínf } B|, |\text{sup } A - \text{sup } B|\} \\ &= |\text{mid } K - \text{mid } K'| + |\text{spr } K - \text{spr } K'|. \end{aligned}$$

La equivalencia topológica deriva del hecho de que para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) &= \sqrt{|\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha|^2 + |\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha|^2} \\ &\leq \sqrt{(|\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha| + |\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha|)^2} \\ &= |\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha| + |\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha| = d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) \end{aligned}$$

y, por la concavidad hacia arriba de la función cuadrado:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) &= 2\sqrt{\frac{1}{2}|\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha|^2} \\ &\geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}|\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha| + \frac{1}{2}|\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha|\right)^2} \\ &= |\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha| + |\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha| = d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha), \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\frac{d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)}{\sqrt{2}} \leq \delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha) \leq d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha).$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) &= \sqrt{\int_{[0,1]} [d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\int_{[0,1]} [\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} = \sqrt{2} D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) &= \sqrt{\int_{[0,1]} [d_H(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} \\ &\geq \sqrt{\int_{[0,1]} [\delta_2(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} = D_1^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}), \end{aligned}$$

lo que garantiza la equivalencia topológica de  $d_2^\varphi$  y todas las métricas  $D_\theta^\varphi$  y que, por lo tanto, todas las ventajas topológicas de  $d_2^\varphi$  se comparten de forma inmediata.

De este modo, si se comprueba la separabilidad de  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), d_2^\varphi)$ , quedará demostrado el resultado. Se va a seguir, con esta finalidad, la demostración dada por Diamond y Kloeden [10] (que a su vez está basada en la desarrollada por Klement *et al.* [25]), extendiéndola al caso en que los niveles puedan ponderarse mediante  $\varphi$ . Para dicha demostración debe encontrarse un subconjunto del

espacio  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), d_2^\varphi)$  que sea denso (es decir, su clausura respecto de  $d_2^\varphi$  coincida con  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ ) y sea numerable.

Si  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $\varepsilon > 0$ , al ser  $\tilde{U}_0$  un intervalo compacto, debe existir un recubrimiento finito minimal de ese intervalo mediante  $r$  intervalos  $Q_i = [a_i, b_i] \neq \emptyset$  con extremos racionales y amplitud inferior a  $\varepsilon/4$  (i.e.,  $\tilde{U}_0 \subset \bigcup_{i=1}^r Q_i$ , con  $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ ,  $a_i < b_i$  y  $b_i - a_i < \varepsilon/4$ ). Para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  arbitrario, debe existir un subrecubrimiento minimal del  $\alpha$ -nivel,  $\{Q_{i(\alpha)}\} \subset \{Q_i\}_{i=1}^r$ , es decir,  $\tilde{U}_\alpha \subset \bigcup_{i(\alpha)} Q_{i(\alpha)}$ . Sea  $V_k = \tilde{U}_0 \cup (\bigcup_{i=k}^r Q_i)$ .

Se cumple, entonces, que

$$d_H \left( \tilde{U}_0, \bigcup_{i=1}^r Q_i \right) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad d_H \left( \tilde{U}_\alpha, \bigcup_{i(\alpha)} Q_{i(\alpha)} \right) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad d_H \left( V_k, \bigcup_{i=k}^r Q_i \right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_i = \sup \tilde{U}([a_i, b_i]) = \sup \{\tilde{U}(x) : a_i \leq x \leq b_i\}$  para  $i \in \{1, \dots, r\}$ , puede suponerse sin pérdida de generalidad (sólo dependería de un nuevo etiquetado de los subíndices) que  $0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_r = 1$ .

Se define el conjunto *fuzzy* (compacto)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in Q_i, i = 1, \dots, r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Cualquiera que sea  $\alpha \in (0, 1]$  debe existir  $k \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\alpha \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ . Si  $k$  es el mayor valor en  $\{1, \dots, r\}$  para el que  $\tilde{U}$  es constante en  $\tilde{U}_0 \cup (\bigcup_{i=1}^k Q_i)$ , se satisface que  $d_H(\tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha) = d_H(V_k, \bigcup_{i=k}^r Q_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Además:

- si  $\alpha_{k-1} = \alpha < \alpha_k$ , entonces

$$d_H(\tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha) \leq d_H \left( \tilde{U}_{\alpha_{k-1}}, \bigcup_{i=k}^r Q_i \right) = d_H \left( V_{k-1}, \bigcup_{i=k}^r Q_i \right) < \frac{\varepsilon}{4};$$

- si  $\alpha_{k-1} < \alpha = \alpha_k$ , se llegaría a la misma conclusión razonando en forma análoga.

Si  $\alpha \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k)$ , entonces

$$d_H(\tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha) \leq d_H \left( \tilde{U}_{\alpha_{k-1}}, \bigcup_{i=k}^r Q_i \right) \leq 2 \max\{b_1 - a_1, \dots, b_r - a_r\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si bien  $\phi$  es un conjunto *fuzzy* (compacto), no es seguro que sea un número *fuzzy* (es decir, que sea convexo), pero sí lo será su envolvente convexa cerrada, que se va a denotar por  $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , tal que  $\tilde{\phi}_\alpha = \overline{\text{co}}(\phi_\alpha)$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Se tiene ahora que:

$$d_H(\tilde{\phi}_\alpha, \phi_\alpha) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} d_H \left( \bigcup_{i(\alpha_k)} Q_{i(\alpha_k)}, \overline{\text{co}} \left( \bigcup_{i(\alpha_k)} Q_{i(\alpha_k)} \right) \right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

En consecuencia:

$$d_2^\varphi(\tilde{\phi}, \phi) = \sqrt{\int_{[0,1]} [d_H(\tilde{\phi}_\alpha, \phi_\alpha)] d\varphi(\alpha)} < \frac{\varepsilon}{4},$$

de donde, por la desigualdad triangular para la métrica  $d_2^\varphi$ :

$$d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \leq d_2^\varphi(\tilde{U}, \phi) + d_2^\varphi(\tilde{\phi}, \phi) < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Sea  $M > 8(r-1)$  spr  $\tilde{U}_0$  y, si es necesario, considérese otro nuevo etiquetado de los subíndices de los  $\alpha_i$  de modo que no haya repeticiones y pueda suponerse que  $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_s = 1$  con  $s \leq r$ . Se considera una secuencia de subíndices racionales  $\{\beta_i\}$  tal que si  $\alpha_i \in \mathbb{Q}$  entonces  $\beta_i = \alpha_i$  y, en caso contrario, se elige  $\beta_i \in \mathbb{Q} \cap (\text{máx}\{\alpha_{i-1}, \alpha_i - \varepsilon^2/M^2\}, \alpha_i)$  y se definen los números *fuzzy*  $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \beta_i & \text{si } \tilde{\phi}(x) = \alpha_i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El conjunto de los  $\psi$ 's resulta numerable. Además:

$$\begin{aligned} d_2^\varphi(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) &\leq \sum_{i=1}^{s-1} \sqrt{\int_{[\beta_i, \alpha_i]} [d_H(\tilde{\psi}_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)]^2 d\varphi(\alpha)} \\ &\leq 2 \text{spr } \tilde{U}_0 \sum_{i=1}^{s-1} < \sqrt{\beta_1 - \alpha_i} < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{\psi}) \leq d_2^\varphi(\tilde{U}, \tilde{\phi}) + d_2^\varphi(\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) < \varepsilon,$$

lo que garantiza la densidad del conjunto de los  $\psi$ 's en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  respecto de  $d_2^\varphi$ , y queda así probada la separabilidad del espacio métrico  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), d_2^\varphi)$  y, por lo tanto, la de  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_1^\varphi)$  y, de forma más general,  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\delta^\varphi)$ .  $\square$

Se concluye esta sección con la formalización de un resultado relevante desde la perspectiva del análisis de datos con valores de número *fuzzy*. Este resultado indica que el espacio de los números *fuzzy*, con la aritmética y métricas descritas y estudiadas en esta sección, se puede encajar isométricamente en un cono cerrado de un espacio de Hilbert de funciones. En consecuencia, si bien la falta de linealidad del espacio de números *fuzzy* con tal aritmética no determina un espacio vectorial y esa aritmética no equivale a la aritmética funcional usual, el encaje isométrico va a permitir una identificación de los números *fuzzy* con ciertas funciones del espacio de Hilbert, de ambas aritméticas y una correspondencia entre la norma del espacio de Hilbert y la métrica  $D_\theta^\varphi$ .

**Proposición 1.2.7.** *Sea  $\theta \in (0, 1]$  y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . Sea  $\mathbb{H}_2 := \{f : [0, 1] \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} : f \in L^2([0, 1] \times \{-1, 1\}), \ell \otimes \lambda_0\}$ . Existe una función  $s : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}_2$  y puede definirse un producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $\mathbb{H}_2$  tales que  $(\mathbb{H}_2, \text{aritmética funcional}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\theta^\varphi)$  es un espacio de Hilbert y  $s$  determina un encaje isométrico de  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), +, \cdot, D_\theta^\varphi)$  en un cono convexo de  $(\mathbb{H}_2, \text{aritmética funcional}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\theta^\varphi)$ .*

*Demostración.* En efecto, basta con considerar la *función soporte* de un número *fuzzy* (introducida, en un contexto más general, por Puri y Ralescu [39], como una extensión nivel a nivel de la función soporte para conjuntos compactos establecida por Minkowski [33]), que se define como la función  $s : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}_2$  con  $s(\tilde{U}) = s_{\tilde{U}}$  tal que  $s_{\tilde{U}} : [0, 1] \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  y

$$s_{\tilde{U}}(\alpha, -1) = -\inf \tilde{U}_\alpha, \quad s_{\tilde{U}}(\alpha, 1) = \sup \tilde{U}_\alpha$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , y el producto interior en  $\mathbb{H}_2$  dado por

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\theta^\varphi &:= \sum_{u=-1,1} \int_{[0,1]} \frac{\text{mid } f(\alpha, u) \cdot \text{mid } g(\alpha, u)}{2} d\varphi(\alpha) \\ &+ \theta \sum_{u=-1,1} \int_{[0,1]} \frac{\text{spr } f(\alpha, u) \cdot \text{spr } g(\alpha, u)}{2} d\varphi(\alpha) \end{aligned}$$

donde

$$\text{mid } f(\alpha, u) := \frac{f(\alpha, u) - f(\alpha, -u)}{2}, \quad \text{spr } f(\alpha, u) := \frac{f(\alpha, u) + f(\alpha, -u)}{2}.$$

Si se define en  $\mathbb{H}_2$  la norma

$$\|h - h'\|_\theta^\varphi := \sqrt{\langle h - h', h - h' \rangle_\theta^\varphi},$$

se cumple que  $\mathbb{H}_2$  con la aritmética funcional usual y dicha norma es un espacio de Hilbert.

Además, cualesquiera que sean  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  y  $u \in \{-1, 1\}$ , se satisface que

$$\begin{aligned} \text{mid } s_{\tilde{U}}(\alpha, 1) &= -\text{mid } s_{\tilde{U}}(\alpha, -1) = \text{mid } \tilde{U}_\alpha, \\ \text{spr } s_{\tilde{U}}(\alpha, 1) &= \text{spr } s_{\tilde{U}}(\alpha, -1) = \text{spr } \tilde{U}_\alpha, \\ [\text{mid } (s_{\tilde{U}} - s_{\tilde{V}})(\alpha, u)]^2 &= [\text{mid } \tilde{U}_\alpha - \text{mid } \tilde{V}_\alpha]^2, \\ [\text{spr } (s_{\tilde{U}} - s_{\tilde{V}})(\alpha, u)]^2 &= [\text{spr } \tilde{U}_\alpha - \text{spr } \tilde{V}_\alpha]^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\|s_{\tilde{U}} - s_{\tilde{V}}\|_\theta^\varphi = D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}).$$

Además, si  $k \geq 0$  se cumplen las igualdades funcionales

$$s_{\tilde{U}+\tilde{V}} = s_{\tilde{U}} + s_{\tilde{V}}, \quad s_{k \cdot \tilde{U}} = k \cdot s_{\tilde{U}},$$

de manera que la función soporte establece una isometría y encaja  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  en un cono convexo de funciones de  $\mathbb{H}_2$ .  $\square$

**Observación 1.2.5.** La estructura no lineal cónica de  $s(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))$  con la aritmética funcional se traduce, entre otros, en el hecho de que  $s_{(-1) \cdot \tilde{U}} \neq (-1) \cdot s_{\tilde{U}}$  (más concretamente,  $s_{(-1) \cdot \tilde{U}}(\alpha, u) = s_{\tilde{U}}(\alpha, -u)$ ).

**Observación 1.2.6.** Conviene señalar que si se prescindiera de la suposición de compacidad de los 0-niveles de los números *fuzzy* considerados, es decir, se consideraran números *fuzzy* no necesariamente acotados, el único cambio relevante en los resultados estudiados en esta sección es que  $s(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))$  sería un cono convexo y cerrado.

**Observación 1.2.7.** La Proposición 1.2.7 confirma que, a pesar de que los números *fuzzy* son funciones que no pueden tratarse directamente como tales con la aritmética funcional usual, sí pueden tratarse como funciones *via* la función soporte.

Como consecuencia, los resultados y métodos probabilísticos y estadísticos para elementos aleatorios con valores funcionales (como el Análisis de Datos Funcionales, en gran auge en la actualidad) podrían aplicarse al de elementos aleatorios con valores de número *fuzzy*, que se describen en la sección siguiente. No obstante, tales resultados y métodos suelen asumir la estructura de espacio de Hilbert y, como se ha señalado,  $s(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))$  será un cono convexo dentro de tal espacio, por lo cual no siempre podrán aplicarse si no hay garantías de que los desarrollos se producen siempre dentro de tal cono. Cuando la aplicación de los resultados y procedimientos para funcionales sean muy complejos o puedan salirse fuera del cono será necesario recurrir a técnicas *ad hoc*.

### 1.3. Formalización de los números *fuzzy* aleatorios

Los números *fuzzy* aleatorios representan un modelo matemático para mecanismos que generan aleatoriamente datos modelados a su vez mediante números *fuzzy*. Este modelo integra la aleatoriedad asociada con la generación de los datos y la imprecisión asociada a la naturaleza de tales datos. En Arellano Jiménez [2] se recoge un resumen histórico sobre este modelo, empezando por Fréchet que, en su estudio sobre elementos aleatorios de cualquier naturaleza [14], anticipó la formalización y el desarrollo futuros de modelos y procedimientos para elementos aleatorios (entendidos como funciones medibles Borel asociadas a un espacio probabilizable) con valores en espacios métricos de índole muy diversa. Y, como ejemplos que motivaban su afirmación, hacía referencia a conceptos que en su mayoría podrían describirse con la ayuda de los números *fuzzy*. Sin embargo, cuando Fréchet anticipó esa idea, aún no se habían introducido ni los conjuntos *fuzzy*, ni los números *fuzzy*.

Féron, discípulo de Fréchet y Darmois, recuperó la idea del primero tomando como modelo para muchos de los datos de naturaleza cualquiera, a los que se había referido Fréchet, los conjuntos *fuzzy*. De este modo, Féron [13] introdujo la noción de conjunto *fuzzy* aleatorio como modelo para los mecanismos aleatorios con valores de conjunto *fuzzy*. Para su formalización, Féron consideró dos enfoques alternativos que, algo después, se probaron equivalentes en condiciones muy generales. Uno de estos enfoques seguía plenamente las ideas de Fréchet, en cuanto a definir un conjunto *fuzzy* aleatorio como un elemento aleatorio (es decir, una función medible Borel del espacio probabilizable asociado al experimento aleatorio de partida en el espacio de los valores *fuzzy* considerados dotado con una métrica apropiada entre estos). El otro enfoque consistía en una extensión nivel a nivel de los conjuntos aleatorios (que se habían empleado con anterioridad, entre otros, en Geometría Estocástica [24], si bien el primer tratamiento sistemático como elementos aleatorios sobre espacios topológicos se debió a Matheron [31]).

Si bien los trabajos de Féron establecieron las bases de la noción de conjunto *fuzzy* aleatorio, fueron Puri y Ralescu [40] (ver también [25, 39]) quienes acabaron de completar su labor, especificando posibles distancias sobre el espacio de los valores *fuzzy*, analizando las propiedades métricas del espacio según la métrica adoptada, y extendiendo el concepto de función soporte al espacio de los valores *fuzzy*.

### 1.3.1. Números *fuzzy* aleatorios: definición

Los números *fuzzy* aleatorios son una versión unidimensional del modelo de Puri y Ralescu, con espacio de llegada en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ .

En [40] Puri y Ralescu consideraron el segundo enfoque esbozado por Féron, como una extensión nivel a nivel de los conjuntos aleatorios, acuñando para el mismo la denominación de *variables aleatorias fuzzy*. Este enfoque, particularizado a  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , se formaliza a continuación.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio probabilizable. Se dice que una función  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  es un **número fuzzy aleatorio** (abreviadamente NFA) asociado al espacio de probabilidad si para todo  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que la función con valores intervalares  $\alpha$ -nivel,  $\mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ , donde para todo  $\omega \in \Omega$*

$$\mathcal{X}_\alpha(\omega) = (\mathcal{X}(\omega))_\alpha$$

*es un intervalo aleatorio compacto (y, por lo tanto, es una función medible Borel con la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología inducida por la métrica de Hausdorff,  $d_H$ ).*

Como esta definición sólo hace referencia a la medibilidad Borel por  $\alpha$ -niveles, nociones como la de distribución inducida por un número *fuzzy* aleatorio o la de independencia de números *fuzzy* aleatorios, cruciales para cualquier estudio probabilístico o estadístico, no quedarían establecidas de forma inmediata. Sin embargo, estudios llevados a cabo en la primera década del siglo XXI han verificado que existen métricas en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  con respecto de las que la condición de medibilidad nivel a nivel en la Definición 1.3.1 equivale a una medibilidad Borel sobre  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  (es decir, se trata de un elemento aleatorio).

El resultado siguiente revisa las conclusiones principales de dichos estudios. Se omite la demostración porque algunas de las equivalencias son muy simples y otras requerirían un examen demasiado extenso que quedaría, además, lejos del nivel y del alcance de un trabajo fin de grado. Las demostraciones de las equivalencias más complejas pueden encontrarse en Colubi *et al.* [7] y Krätschmer [27].

**Proposición 1.3.1.** *Si  $(\Omega, \mathcal{A})$  es un espacio probabilizable y  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , las siguientes definiciones de NFA son equivalentes a la dada en la Definición 1.3.1:*

- (i)  *$\mathcal{X}$  es NFA  $\Leftrightarrow \mathcal{X}$  es una función medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología inducida por la métrica  $d_2$ , es decir, cualquiera que sea  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que para todo  $\tilde{U} \in \mathcal{F}$  existe  $\varepsilon_{\tilde{U}} > 0$  tal que  $B_{d_2}(\tilde{U}, \varepsilon_{\tilde{U}}) = \{\tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) : d_2(\tilde{U}, \tilde{V}) < \varepsilon_{\tilde{U}}\} \subset \mathcal{F}$  (de modo que  $\mathcal{F}$  es un abierto de la topología antedicha) se cumple que  $\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{A}$ .*

- (ii)  $\mathcal{X}$  es NFA  $\Leftrightarrow \mathcal{X}$  es una función medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología inducida por la métrica  $D_\theta^\varphi$ , es decir, cualquiera que sea  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que para todo  $\tilde{U} \in \mathcal{F}$  existe  $\varepsilon_{\tilde{U}} > 0$  tal que  $B_{D_\theta^\varphi}(\tilde{U}, \varepsilon_{\tilde{U}}) = \{\tilde{V} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) : D_\theta^\varphi(\tilde{U}, \tilde{V}) < \varepsilon_{\tilde{U}}\} \subset \mathcal{F}$  (de modo que  $\mathcal{F}$  es un abierto de la topología antedicha) se cumple que  $\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{A}$ .
- (iii)  $\mathcal{X}$  es NFA  $\Leftrightarrow$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  las funciones reales  $\inf \mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sup \mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son variables aleatorias reales, es decir, medibles respecto de la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología inducida por la distancia euclídea en  $\mathbb{R}$ .
- (iv)  $\mathcal{X}$  es NFA  $\Leftrightarrow$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  las funciones reales  $\text{mid } \mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\text{spr } \mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  son variables aleatorias reales.

En lo que sigue, por un NFA se entenderá indistintamente y según convenga la noción en la Definición 1.3.1 o su equivalente en la Proposición 1.3.1-ii.

La medibilidad Borel de un NFA según se expone en la equivalencia en la Proposición 1.3.1-ii, hace posible referirse de manera inmediata y rigurosa a la distribución inducida por un NFA, la independencia estocástica de NFAs, etc., sin necesidad de definir estas nociones expresamente.

**Definición 1.3.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  un NFA asociado a  $(\Omega, \mathcal{A})$ . La **distribución de probabilidad inducida por  $\mathcal{X}$  a partir de  $P$**  es la aplicación  $P_{\mathcal{X}} : \mathcal{B}_{\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi} \rightarrow [0, 1]$  (con  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  por la topología inducida por la métrica  $D_\theta^\varphi$ ) tal que para todo  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi}$ :

$$P_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) = P(\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{F})) = P(\{\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in \mathcal{F}\}\}).$$

En particular,

$$P_{\mathcal{X}}(\tilde{U}) = P(\mathcal{X}^{-1}(\{\tilde{U}\})) = P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) = \tilde{U}\}).$$

**Definición 1.3.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sean  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{Y} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  dos NFAs asociados a  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Se dice que  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  son **NFAs independientes** si cualesquiera que sean  $F, F' \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi}$  se cumple que  $\mathcal{X}^{-1}(F)$  e  $\mathcal{Y}^{-1}(F')$  son sucesos independientes en el espacio de probabilidad de partida, es decir:

$$\begin{aligned} & P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in F, \mathcal{Y}(\omega) \in F'\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in F\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{Y}(\omega) \in F'\}). \end{aligned}$$

**Observación 1.3.1.** Si bien la distribución inducida por un número *fuzzy* aleatorio se define de forma inmediata gracias a su medibilidad Borel, no es posible construir una extensión universalmente admisible de la noción de función de distribución para caracterizar la distribución inducida por un NFA. Esto se debe al hecho de que no existe un criterio de ordenación total entre números *fuzzy* que sea universalmente aceptable.

### 1.3.2. La media tipo Aumann de un número *fuzzy* aleatorio

Como en el caso de variables aleatorias con valores reales, la distribución inducida por un NFA puede resumirse a través de una serie de medidas, o parámetros de la distribución del NFA. De entre ellas, la más popular en este contexto es la media tipo Aumann, introducida por Puri y Ralescu [40], que puede verse como una extensión nivel a nivel de la media del valor esperado de Aumann para conjuntos aleatorios o, alternativamente, puede definirse como la media de un elemento aleatorio con valores funcionales con la ayuda de la función soporte.

**Definición 1.3.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  un NFA asociado a él, de forma que cumple  $\sup_{x \in \mathcal{X}_0} |x| = \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  (condición a la que suele referirse como *integrabilidad acotada*). Se define **la media (poblacional) *fuzzy* tipo Aumann de  $\mathcal{X}$**  como el número *fuzzy*  $\tilde{E}(\mathcal{X}) \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que para cada  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha &= \text{integral de Kudō-Aumann de } \mathcal{X}_\alpha \\ &= \left\{ \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) : f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P), f \stackrel{c.s. [P]}{\in} \mathcal{X}_\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Para ver que la Definición 1.3.4 está formalizada rigurosamente, va a verificarse que  $(\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha$  puede expresarse de una forma más sencilla y que constituye el  $\alpha$ -nivel de un número *fuzzy*.

**Proposición 1.3.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  un NFA asociado a él e *integrablemente acotado*. Entonces, la media *fuzzy* tipo Aumann de  $\mathcal{X}$  cumple que:

i) para cada  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$(\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha = [E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)].$$

ii)  $\tilde{E}(\mathcal{X})$  determina, efectivamente, un número *fuzzy*.

*Demostración.* En efecto, va a probarse la equivalencia de la Definición 1.3.4 con la que establece el resultado en *i*) y, posteriormente, se verificará que los  $(\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha$  configuran un número *fuzzy*.

- Cualquiera que sea  $\alpha \in [0, 1]$ , si  $x \in (\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha$ , la Definición 1.3.4 garantiza que existe  $f_x \stackrel{c.s [P]}{\in} \mathcal{X}_\alpha$ ,  $f_x \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , tal que  $x = \int_\Omega f_x(\omega) dP(\omega)$ . Además,  $f_x \stackrel{c.s [P]}{\in} \mathcal{X}_\alpha$  asegura que

$$\begin{aligned} \inf \mathcal{X}_0 &\leq \inf \mathcal{X}_\alpha \stackrel{c.s [P]}{\leq} f_x \stackrel{c.s [P]}{\leq} \sup \mathcal{X}_\alpha \leq \sup \mathcal{X}_0, \\ -\sup \mathcal{X}_0 &\leq -\sup \mathcal{X}_\alpha \stackrel{c.s [P]}{\leq} -f_x \stackrel{c.s [P]}{\leq} -\inf \mathcal{X}_\alpha \leq -\inf \mathcal{X}_0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} |\inf \mathcal{X}_\alpha| &\leq \max\{-\inf \mathcal{X}_0, \sup \mathcal{X}_0\} \leq \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\}, \\ |\sup \mathcal{X}_\alpha| &\leq \max\{-\inf \mathcal{X}_0, \sup \mathcal{X}_0\} \leq \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\}, \\ |f_x| &\stackrel{c.s [P]}{\leq} \max\{-\inf \mathcal{X}_0, \sup \mathcal{X}_0\} \leq \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\}, \end{aligned}$$

por lo que se concluye que  $\inf \mathcal{X}_\alpha, \sup \mathcal{X}_\alpha, f_x \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y

$$\int_\Omega \inf \mathcal{X}_\alpha(\omega) dP(\omega) \leq \int_\Omega f_x(\omega) dP(\omega) \leq \int_\Omega \sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) dP(\omega),$$

es decir,  $x \in [E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)]$ .

Por otro lado, si  $x \in [E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)]$ , debe existir un  $\lambda_x \in [0, 1]$  tal que

$$\begin{aligned} x &= \lambda_x \cdot E(\sup \mathcal{X}_\alpha) + (1 - \lambda_x) \cdot E(\inf \mathcal{X}_\alpha) \\ &= \int_\Omega [\lambda_x \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) + (1 - \lambda_x) \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha(\omega)] dP(\omega). \end{aligned}$$

Como  $[\lambda_x \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha + (1 - \lambda_x) \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha] \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y la función  $[\lambda_x \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) + (1 - \lambda_x) \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha(\omega)] \in \mathcal{X}_\alpha$ , se tiene que  $x \in (\tilde{E}(\mathcal{X}))_\alpha$ .

En consecuencia, el resultado en *i*) queda probado.

- Para demostrar *ii*), hay que probar que  $\tilde{E}(\mathcal{X})$  es un número *fuzzy*. Para ello va a hacerse uso de la representación inf/sup de un número *fuzzy* de la Proposición 1.1.1, considerando las funciones de variable real  $L, R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= E(\inf \mathcal{X}_\alpha) = \int_\Omega \inf \mathcal{X}_\alpha(\omega) dP(\omega), \\ R(\alpha) &= E(\sup \mathcal{X}_\alpha) = \int_\Omega \sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) dP(\omega) \end{aligned}$$

y verificando que  $(L, R)$  es la representación inf/sup de un número *fuzzy*. En efecto:

- $L$  y  $R$  son continuas por la izquierda para  $\alpha \in (0, 1]$ . Así, si  $\alpha_0 \in (0, 1]$  se fija arbitrariamente, sea  $\{\alpha_n\}_n$  una sucesión monótona creciente de valores en  $(0, 1]$  tal que  $\alpha_n \uparrow \alpha_0$ . Dado que, por hipótesis,  $\max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y que, como se vio en la demostración de *i*), se cumple que

$$|\inf \mathcal{X}_{\alpha_n}| \leq \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\},$$

$$|\sup \mathcal{X}_{\alpha_n}| \leq \max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\},$$

las sucesiones de funciones (variables aleatorias reales)  $\{\inf \mathcal{X}_{\alpha_n}\}_n$  y  $\{\sup \mathcal{X}_{\alpha_n}\}_n$  se encuentran dominadas por  $\max\{|\inf \mathcal{X}_0|, |\sup \mathcal{X}_0|\}$ , lo que asegura su integrabilidad y permite aplicar sobre ellas el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Como, según se estudió en la Proposición 1.1.1, cualquiera que sea  $\omega \in \Omega$  se satisface que  $\lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \inf \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) = \inf \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega)$  y  $\lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \sup \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) = \sup \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega)$ , se concluye que:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} L(\alpha_n) &= \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} E(\inf \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega)) \\ &= \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \int_{\Omega} \inf \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \left[ \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \inf \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) \right] dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \inf \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega) dP(\omega) = E(\inf \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega)) = L(\alpha_0). \end{aligned}$$

Análogamente, se concluye que:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} R(\alpha_n) &= \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} E(\sup \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega)) \\ &= \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \int_{\Omega} \sup \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \left[ \lim_{\alpha_n \uparrow \alpha_0} \sup \mathcal{X}_{\alpha_n}(\omega) \right] dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sup \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega) dP(\omega) = E(\sup \mathcal{X}_{\alpha_0}(\omega)) = R(\alpha_0). \end{aligned}$$

- $L$  y  $R$  son continuas por la derecha en  $\alpha = 0$ . Así, sea  $\{\alpha_n\}_n$  una sucesión monótona decreciente de valores en  $(0, 1]$  tal que  $\alpha_n \downarrow 0$ . Basta repetir el razonamiento precedente para demostrar la continuidad por la izquierda, y se concluye que:

$$\lim_{\alpha_n \downarrow 0} L(\alpha_n) = L(0), \quad \lim_{\alpha_n \downarrow 0} R(\alpha_n) = R(0).$$

- $L$  es obviamente no decreciente, ya que si  $\alpha, \alpha' \in [0, 1]$  con  $\alpha < \alpha'$  entonces, para todo  $\omega \in \Omega$  se tiene que  $\inf \mathcal{X}_{\alpha}(\omega) \leq \inf \mathcal{X}_{\alpha'}(\omega)$ , y la monotonía de la integral garantiza que

$$L(\alpha) = \int_{\Omega} \inf \mathcal{X}_{\alpha}(\omega) dP(\omega) \leq \int_{\Omega} \inf \mathcal{X}_{\alpha'}(\omega) dP(\omega) = L(\alpha').$$

Y  $R$  es obviamente no creciente, ya que si  $\alpha, \alpha' \in [0, 1]$  con  $\alpha < \alpha'$  entonces, para todo  $\omega \in \Omega$ , se tiene que  $\sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) \geq \sup \mathcal{X}_{\alpha'}(\omega)$ , y la monotonía de la integral corrobora que

$$R(\alpha) = \int_{\Omega} \sup \mathcal{X}_\alpha(\omega) dP(\omega) \leq \int_{\Omega} \sup \mathcal{X}_{\alpha'}(\omega) dP(\omega) = R(\alpha').$$

- o Finalmente, se comprueba que  $L(1) \leq R(1)$ , ya que cualquiera que sea  $\omega \in \Omega$  se tiene que  $\inf \mathcal{X}_1(\omega) \leq \sup \mathcal{X}_1(\omega)$ , por lo que la monotonía de la integral confirma que

$$L(1) = \int_{\Omega} \inf \mathcal{X}_1(\omega) dP(\omega) \leq \int_{\Omega} \sup \mathcal{X}_1(\omega) dP(\omega) = R(1). \quad \square$$

La media *fuzzy* tipo Aumann de un NFA puede definirse de una forma equivalente mediante la función soporte.

**Proposición 1.3.3.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  un NFA asociado a él e integrablemente acotado. Entonces, la media fuzzy tipo Aumann de  $\mathcal{X}$  cumple que cualesquiera que sean  $\alpha \in [0, 1]$  y  $u \in \{-1, 1\}$ :*

$$s_{\tilde{E}(\mathcal{X})}(\alpha, u) = E(s_{\mathcal{X}}(\alpha, u)).$$

*Demostración.* En efecto:

$$\begin{aligned} s_{\tilde{E}(\mathcal{X})}(\alpha, 1) &= \sup \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_{\alpha} = E(\sup \mathcal{X}_{\alpha}) = E(s_{\mathcal{X}}(\alpha, 1)), \\ s_{\tilde{E}(\mathcal{X})}(\alpha, -1) &= -\inf \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_{\alpha} = E(-\inf \mathcal{X}_{\alpha}) = E(s_{\mathcal{X}}(\alpha, -1)). \end{aligned} \quad \square$$

**Observación 1.3.2.** El segundo miembro de la igualdad en la Proposición 1.3.3 podría expresarse alternativamente en términos de un concepto más general de esperanza sobre espacios lineales normados, como  $\mathbb{H}_2$ , la llamada integral de Pettis.

El operador media tipo Aumann de números *fuzzy* aleatorios conserva las propiedades más relevantes de la media de variables aleatorias con valores reales, como se ve a continuación.

**Proposición 1.3.4.** *La media tipo Aumann de un NFA es coherente con la aritmética fuzzy basada en el principio de extensión de Zadeh. Más concretamente, si  $\mathcal{X}$  es un NFA discreto integrablemente acotado, es decir, que  $\mathcal{X}(\Omega) \stackrel{c.s.[P]}{=} \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m, \dots\} \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , con distribución de probabilidad (inducida)  $P(\mathcal{X} = \tilde{x}_i) = P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) = \tilde{x}_i\})$ , entonces:*

$$\tilde{E}(\mathcal{X}) = P(\mathcal{X} = \tilde{x}_1) \cdot \tilde{x}_1 + \dots + P(\mathcal{X} = \tilde{x}_m) \cdot \tilde{x}_m + \dots$$

En particular, si  $\mathcal{X}$  es un NFA asociado a un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y su distribución es degenerada en el número fuzzy  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , i.e.,  $\mathcal{X} \stackrel{c.s. [P]}{=} \tilde{U}$ , entonces  $\tilde{E}(\mathcal{X}) = \tilde{U}$ .

Por otro lado, también en particular, si una muestra de individuos  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  lleva asociada a través de un NFA  $\mathcal{X}$  una muestra de datos fuzzy  $\tilde{\mathbf{x}}_n = (\mathcal{X}(\omega_1), \dots, \mathcal{X}(\omega_n)) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ , la **media (muestral) de tipo Aumann** es el número fuzzy  $\overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}$  tal que para todo  $\alpha \in [0, 1]$

$$\left(\overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}\right)_\alpha = \left(\frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n)\right)_\alpha = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf(\tilde{x}_i)_\alpha, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup(\tilde{x}_i)_\alpha\right].$$

*Demostración.* En efecto, si  $\mathcal{X}(\Omega) \stackrel{c.s. [P]}{=} \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m, \dots\} \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $P(\mathcal{X} = \tilde{x}_i) = P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) = \tilde{x}_i\})$ , para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  la variable aleatoria real  $\inf \mathcal{X}_\alpha$  tomará los valores (repetidos o no)  $\inf(\tilde{x}_i)_\alpha$  con probabilidades  $P(\mathcal{X} = \tilde{x}_i)$ , de donde:

$$\begin{aligned} \inf\left(\overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}\right)_\alpha &= E(\inf \mathcal{X}_\alpha) = P(\mathcal{X} = \tilde{x}_1) \cdot \inf(\tilde{x}_1)_\alpha + \dots + P(\mathcal{X} = \tilde{x}_m) \cdot \inf(\tilde{x}_m)_\alpha + \dots \\ &= \inf\left(P(\mathcal{X} = \tilde{x}_1) \cdot \tilde{x}_1 + \dots + P(\mathcal{X} = \tilde{x}_m) \cdot \tilde{x}_m + \dots\right)_\alpha \end{aligned}$$

y la variable aleatoria real  $\sup \mathcal{X}_\alpha$  tomará los valores (repetidos o no)  $\sup(\tilde{x}_i)_\alpha$  con probabilidades  $P(\mathcal{X} = \tilde{x}_i)$ , de donde:

$$\begin{aligned} \sup\left(\overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}\right)_\alpha &= E(\sup \mathcal{X}_\alpha) = P(\mathcal{X} = \tilde{x}_1) \cdot \sup(\tilde{x}_1)_\alpha + \dots + P(\mathcal{X} = \tilde{x}_m) \cdot \sup(\tilde{x}_m)_\alpha + \dots \\ &= \sup\left(P(\mathcal{X} = \tilde{x}_1) \cdot \tilde{x}_1 + \dots + P(\mathcal{X} = \tilde{x}_m) \cdot \tilde{x}_m + \dots\right)_\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 1.3.5.** *La media tipo Aumann de un NFA es invariante bajo transformaciones afines en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , i.e., si  $\mathcal{X}$  es un NFA integrablemente acotado,  $k \in \mathbb{R}$  y  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ , entonces, supuesta considerada la aritmética fuzzy basada en el principio de extensión de Zadeh:*

$$\tilde{E}(k \cdot \mathcal{X} + \tilde{U}) = k \cdot \tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{U}.$$

*Demostración.* La aritmética fuzzy basada en el principio de extensión de Zadeh asegura que, cualesquiera que sean  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $k \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$(\mathcal{X} + \tilde{U})_\alpha = \mathcal{X}_\alpha + \tilde{U}_\alpha, \quad (k \cdot \mathcal{X})_\alpha = k \cdot \mathcal{X}_\alpha,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left(\tilde{E}(k \cdot \mathcal{X} + \tilde{U})\right)_\alpha &= \left[E(\inf(k \cdot \mathcal{X}_\alpha + \tilde{U}_\alpha)), E(\sup(k \cdot \mathcal{X}_\alpha + \tilde{U}_\alpha))\right] \\ &= \left[E(\inf(k \cdot \mathcal{X}_\alpha)) + \inf \tilde{U}_\alpha, E(\sup(k \cdot \mathcal{X}_\alpha)) + \sup \tilde{U}_\alpha\right]. \end{aligned}$$

Separando los dos casos posibles, en función del signo de  $k$ , se satisface que:

- si  $k \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\tilde{E}(k \cdot \mathcal{X} + \tilde{U})\right)_\alpha &= \left[E(k \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha) + \inf \tilde{U}_\alpha, E(k \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha) + \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= \left[E(k \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha), E(k \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= \left[k \cdot E(\inf \mathcal{X}_\alpha), k \cdot E(\sup \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= k \cdot \left[E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= k \cdot \left(\tilde{E}(\mathcal{X})\right)_\alpha + \tilde{U}_\alpha = \left(k \cdot \tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{U}\right)_\alpha;
 \end{aligned}$$

- si  $k < 0$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\tilde{E}(k \cdot \mathcal{X} + \tilde{U})\right)_\alpha &= \left[E(k \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha) + \inf \tilde{U}_\alpha, E(k \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha) + \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= \left[E(k \cdot \sup \mathcal{X}_\alpha), E(k \cdot \inf \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= \left[k \cdot E(\sup \mathcal{X}_\alpha), k \cdot E(\inf \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= k \cdot \left[E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[\inf \tilde{U}_\alpha, \sup \tilde{U}_\alpha\right] \\
 &= k \cdot \left(\tilde{E}(\mathcal{X})\right)_\alpha + \tilde{U}_\alpha = \left(k \cdot \tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{U}\right)_\alpha. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Proposición 1.3.6.** *La media tipo Aumann de un NFA es aditiva, i.e., si  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  son NFAs asociados al mismo espacio de probabilidad e integrablemente acotados, entonces:*

$$\tilde{E}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{E}(\mathcal{Y}).$$

*Demostración.* Razonando de forma similar a la proposición anterior, cualquiera que sea  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{E}(\mathcal{Y})\right)_\alpha &= \left[E(\inf (\mathcal{X} + \mathcal{Y})_\alpha), E(\sup (\mathcal{X} + \mathcal{Y})_\alpha)\right] \\
 &= \left[E(\inf \mathcal{X}_\alpha + \inf \mathcal{Y}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha + \sup \mathcal{Y}_\alpha)\right] \\
 &= \left[E(\inf \mathcal{X}_\alpha) + E(\inf \mathcal{Y}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha) + E(\sup \mathcal{Y}_\alpha)\right] = \\
 &= \left[E(\inf \mathcal{X}_\alpha), E(\sup \mathcal{X}_\alpha)\right] + \left[E(\inf \mathcal{Y}_\alpha), E(\sup \mathcal{Y}_\alpha)\right] \\
 &= \left(\tilde{E}(\mathcal{X})\right)_\alpha + \left(\tilde{E}(\mathcal{Y})\right)_\alpha = \left(\tilde{E}(\mathcal{X}) + \tilde{E}(\mathcal{Y})\right)_\alpha. \quad \square
 \end{aligned}$$

Una forma de corroborar que la media tipo Aumann de un NFA es, en efecto, una medida de la tendencia central o localización de su distribución es comprobar que se trata de la esperanza de Fréchet en relación con la métrica tipo  $L^2$  que se considera en este trabajo, es decir,  $D_\theta^\varphi$ .

**Proposición 1.3.7.** *Sea  $\mathcal{X}$  un NFA integrablemente acotado. Cualquiera que sean  $\theta \in (0, 1]$  y  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ ,  $\tilde{E}(\mathcal{X})$  es el valor esperado  $D_\theta^\varphi$ -Fréchet, i.e.,*

$$\tilde{E}(\mathcal{X}) = \arg \min_{\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})} E([D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \tilde{U})]^2).$$

Por lo tanto, la media tipo Aumann de un NFA es el número fuzzy que hace mínima la media de las distancias  $D_\theta^\varphi$  al cuadrado respecto de la distribución del NFA.

*Demostración.* En efecto, el resultado en la Proposición 1.3.2.i permite expresar de forma inmediata la media tipo Aumann en términos de la representación mid /spr, de manera que cualquiera que sea  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \text{mid} \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha &= \frac{\inf \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha + \sup \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha}{2} \\ &= \frac{E(\inf \mathcal{X}_\alpha) + E(\sup \mathcal{X}_\alpha)}{2} = E(\text{mid } \mathcal{X}_\alpha), \\ \text{spr} \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha &= \frac{\sup \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha - \inf \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha}{2} \\ &= \frac{E(\sup \mathcal{X}_\alpha) - E(\inf \mathcal{X}_\alpha)}{2} = E(\text{spr } \mathcal{X}_\alpha). \end{aligned}$$

Por otro lado, como la media de una variable aleatoria real es el valor en el que se alcanza el mínimo de la media de las distancias euclídeas al cuadrado entre los valores de la variable y un valor fijo, cualquiera que sea  $\tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{mid } \tilde{U}_\alpha]^2 dP(\omega) &\geq \int_{\Omega} [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - E(\text{mid } \mathcal{X}_\alpha)]^2 dP(\omega), \\ \int_{\Omega} [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{spr } \tilde{U}_\alpha]^2 dP(\omega) &\geq \int_{\Omega} [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - E(\text{spr } \mathcal{X}_\alpha)]^2 dP(\omega). \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} &E([D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \tilde{U})]^2) \\ &= \int_{\Omega} \int_{[0,1]} \left( [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{mid } \tilde{U}_\alpha]^2 + \theta [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{spr } \tilde{U}_\alpha]^2 \right) d\varphi(\alpha) dP(\omega) \\ &= \int_{[0,1]} \int_{\Omega} \left( [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{mid } \tilde{U}_\alpha]^2 + \theta [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{spr } \tilde{U}_\alpha]^2 \right) dP(\omega) d\varphi(\alpha) \\ &\geq \int_{[0,1]} \int_{\Omega} \left( [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - E(\text{mid } \mathcal{X}_\alpha)]^2 + \theta [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - E(\text{spr } \mathcal{X}_\alpha)]^2 \right) dP(\omega) d\varphi(\alpha) \\ &= \int_{\Omega} \int_{[0,1]} \left( [\text{mid } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{mid} \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha]^2 \right. \\ &\quad \left. + \theta [\text{spr } \mathcal{X}_\alpha(\omega) - \text{spr} \left( \tilde{E}(\mathcal{X}) \right)_\alpha]^2 \right) d\varphi(\alpha) dP(\omega) = E([D_\theta^\varphi(\mathcal{X}, \tilde{E}(\mathcal{X}))]^2). \quad \square \end{aligned}$$

Por último, conviene subrayar que la media tipo Aumann satisface *leyes fuertes de los grandes números* para la mayoría de las métricas que se pueden considerar en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ . La ley para  $D_\theta^\varphi$  se resume a continuación y se basa en los resultados en Colubi *et al.* [9] (ver también, por ejemplo, Molchanov [35]). Establece que, usando dicha métrica, la media tipo Aumann de un NFA es el límite casi seguro de la ‘media *fuzzy* muestral’. La demostración se omite por resultar demasiado extensa y no ser crucial para el trabajo; además, precisa diversos conceptos y desarrollos de apoyo y a un nivel, unos requerimientos formativos y un alcance muy por encima del de un trabajo fin de grado.

**Proposición 1.3.8.** Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad,  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  un NFA asociado e integrablemente acotado y  $\{\mathcal{X}_n\}_n$  una sucesión de NFAs independientes e idénticamente distribuidos que  $\mathcal{X}$ . Si  $\overline{\mathcal{X}}_n$  denota la media *fuzzy* muestral  $\overline{\mathcal{X}}_n = \frac{1}{n} \cdot (\mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{X}_n)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, \tilde{E}(\mathcal{X})) \stackrel{c.s. [P]}{=} 0.$$

## 1.4. Algunos métodos del análisis de datos *fuzzy*

El análisis estadístico de datos *fuzzy* tiene, al igual que el de datos de cualquier naturaleza, dos objetivos principales:

- **describir** el comportamiento de los números *fuzzy* aleatorios en las muestras disponibles y
- **extraer conclusiones** sobre el comportamiento poblacional de los números *fuzzy* aleatorios sobre la base de la información muestral disponible.

Siempre intentando generalizar la metodología seguida para el tratamiento de datos numéricos, es inmediato detectar varias diferencias importantes que se traducen en carencias e inconvenientes a la hora de los desarrollos metodológicos. Entre ellas, deben citarse:

- ✓ la no existencia de una operación ‘diferencia’ entre números *fuzzy* que conserve la estructura lineal,
- ✓ la no existencia de un orden universalmente aceptable entre números *fuzzy*,
- ✓ la falta, hasta el momento, de modelos realistas y adecuados que se ajusten bien a las distribuciones de los NFAs y
- ✓ la falta, hasta el momento, de resultados tipo Teoremas del Límite Central para NFAs que puedan emplearse directamente para extraer conclusiones inferenciales.

Teniendo en cuenta esas limitaciones, desde hace cerca de dos décadas se han empezado a desarrollar diversos procedimientos inferenciales con datos *fuzzy*. Para evitar las deficiencias que acaban de apuntarse, las herramientas clave han sido las siguientes:

- La aritmética *fuzzy*, las métricas apropiadas entre datos *fuzzy* y el concepto de número *fuzzy* aleatorio, que permiten, a través de la función soporte, encajar isométricamente el espacio de los números *fuzzy* en un cono convexo de un espacio de Hilbert de funciones reales.
- La aproximación de resultados probabilísticos para espacios generalizados, como el Teorema del Límite Central bootstrap para elementos aleatorios con valores en espacios de Hilbert. La incorporación del bootstrap salva así el problema que podría entrañar la estructura cónica si se aplicara directamente el Teorema del Límite Central para elementos aleatorios con valores en espacios de Hilbert. Este último garantiza que todos los desarrollos se realizan en el espacio de Hilbert de funciones  $\mathbb{H}_2$ , pero no necesariamente dentro del cono, en cuyo caso las conclusiones no serían válidas al aplicarlas sobre datos *fuzzy*. Sin embargo, la aproximación bootstrap del Teorema del Límite Central basa todos sus desarrollos en medias muestrales que sí toman valores sin salirse del cono.
- Pueden particularizarse procedimientos del Análisis de Datos Funcionales para datos *fuzzy* siempre que, tanto durante el procedimiento como en su resultado final, ningún desarrollo pueda salir fuera del cono en el que se encaja el espacio de los datos considerados.
- Alternativamente, y si la estrategia última falla, pueden construirse procedimientos *ad hoc* para datos *fuzzy*.

Es crucial, en este punto, reseñar las dos fortalezas principales de esta metodología:

- ▲ Existen fundamentos matemáticos sólidos que apoyan y aseguran el rigor probabilístico necesario: encajes isométricos en espacios de Hilbert, medibilidad Borel, etc.
- ▲ La complejidad matemática subyacente apenas afecta a la sencillez de computación y al uso práctico de la metodología, que puede aplicarse por usuarios sin una formación demasiado especializada a través de programas que se van desarrollando en R y en MatLab.

De hecho, es muy posible que el empleo de los números *fuzzy* aleatorios y de la metodología de análisis estadístico basada en ellos fuera bastante más popular si los usuarios potenciales fueran conscientes de esto último.

A día de hoy, se han desarrollado varios métodos para el análisis estadístico de datos *fuzzy*. En lo que se refiere a las técnicas inferenciales, pueden citarse: estimación y contrastes de hipótesis para las medias tipo Aumann, estimación y contrastes de hipótesis para las varianzas tipo Fréchet, estimación y contrastes de hipótesis para índices de desigualdad o dispersión relativa (*fuzzy* y reales), estimación de parámetros de modelos lineales, etc. En Blanco-Fernández *et al.* [4, 5] y Lubiano *et al.* [30] puede verse una revisión acerca de estos problemas estadísticos y las propuestas para su resolución.

En este trabajo se va a recurrir al análisis inferencial de la media tipo Aumann de un NFA en dos situaciones concretas, de modo que en esta sección van a recordarse únicamente los procedimientos de contraste de hipótesis sobre la media tipo Aumann del caso unimuestral y de contraste de la igualdad de medias tipo Aumann bimuestral para NFAs ligados (i.e., dependientes). Además de formular los resultados teóricos, se van a presentar los algoritmos que aproximan tales resultados.

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $\mathcal{X}$  un NFA integrablemente acotado. Sean cualesquiera  $\theta \in (0, 1]$  y  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio probabilizable  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . Para contrastar la hipótesis estadística  $H_0 : \tilde{E}(\mathcal{X}) = \tilde{U} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  al nivel de significación nominal  $\varsigma \in [0, 1]$  sobre la base de una muestra aleatoria simple  $(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)$  (es decir, las  $\mathcal{X}_i$  son independientes e idénticamente distribuidas que  $\mathcal{X}$ ), se considera como población bootstrap  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$  y  $(\mathcal{X}_1^*, \dots, \mathcal{X}_n^*)$  es una muestra bootstrap a partir de esa población.  $H_0$  debe rechazarse al nivel  $\varsigma$  si*

$$T_n = \frac{\left[ D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, \tilde{U}) \right]^2}{\widehat{S}_n^2} > z_\varsigma$$

donde  $z_\varsigma$  es el percentil de orden  $100(1 - \varsigma)$  de la distribución del estadístico bootstrap  $T_n^* = \left[ D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n^*, \overline{\mathcal{X}}_n) \right]^2 / \widehat{S}_n^{*2}$  con  $\widehat{S}_n^{*2} = \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}_n) \right]^2 / (n - 1)$ ,  $\overline{\mathcal{X}}_n^* = (1/n) \cdot (\mathcal{X}_1^* + \dots + \mathcal{X}_n^*)$  y  $\widehat{S}_n^{*2} = \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i^*, \overline{\mathcal{X}}_n^*) \right]^2 / (n - 1)$ .

*Demostración.* En efecto, el resultado se deriva de forma directa a partir de las conclusiones asintóticas en Körner [26] y de la aproximación bootstrap del Teorema del Límite Central para elementos aleatorios generalizados (más concretamente, con

valores en espacios de Banach separables), establecido por Giné y Zinn [16], según se recogió en González-Rodríguez *et al.* [20] como extensión del caso discreto de Montenegro *et al.* [36].  $\square$

El contraste bootstrap precedente puede aplicarse algorítmicamente como sigue. Supuesto que  $\tilde{\mathbf{x}}_n = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  es una muestra de observaciones independientes a partir del NFA  $\mathcal{X}$ :

*Paso 1:* Se calcula el valor del estadístico de contraste,  $T_n$ , para la muestra de datos *fuzzy* inicial:

$$T_n = \frac{\left[ D_\theta^\varphi \left( \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n), \tilde{U} \right) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi \left( \tilde{x}_i, \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n) \right) \right]^2}.$$

*Paso 2:* Se fija la población bootstrap,  $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ .

*Paso 3:* Se obtiene una muestra de observaciones independientes de la población bootstrap,  $\tilde{\mathbf{x}}_n^* = (\tilde{x}_1^*, \dots, \tilde{x}_n^*)$ .

*Paso 4:* Se calcula el valor del estadístico para la muestra bootstrap,

$$T_n^* = \frac{\left[ D_\theta^\varphi \left( \frac{1}{n} \cdot [\tilde{x}_1^* + \dots + \tilde{x}_n^*], \frac{1}{n} \cdot [\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n] \right) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi \left( \tilde{x}_i^*, \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1^* + \dots + \tilde{x}_n^*) \right) \right]^2}.$$

*Paso 5:* Se repiten los *Pasos 3* y *4* un número muy grande de veces,  $B$ , para obtener un conjunto de  $B$  estimaciones (valores de  $T_n^*$ ) que se denotará por  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$ .

*Paso 6:* Se halla el  $p$ -valor bootstrap, que corresponderá a la proporción de veces que  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$  es mayor que el valor de  $T_n$  para la muestra inicial.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  un conjunto fuzzy aleatorio bidimensional asociado a un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  (que será una función  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  tal que sus  $\alpha$ -niveles sean conjuntos compactos y convexos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$ ),  $\theta \in (0, 1]$  y  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ . Para contrastar la hipótesis estadística  $H_0 : \tilde{E}(\mathcal{X}) = E(\mathcal{Y})$  al nivel de significación nominal  $\varsigma \in [0, 1]$ , sobre la base de una muestra aleatoria simple  $((\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \dots, (\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n))$ , se considera como población bootstrap  $\{(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \dots, (\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)\}$  y  $((\mathcal{X}, \mathcal{Y})_1^* \dots, (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_n^*)$ ,*

denotada alternativamente por  $((\mathcal{X}_1^*, \mathcal{Y}_1^*) \dots, (\mathcal{X}_n^*, \mathcal{Y}_n^*))$ , es una muestra bootstrap a partir de esa población.  $H_0$  debe rechazarse a ese nivel si

$$T_n = \frac{\left[ D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n, \overline{\mathcal{Y}}_n) \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i + \overline{\mathcal{X}}_n, \mathcal{Y}_i + \overline{\mathcal{Y}}_n) \right]^2} > z_\varsigma$$

donde  $z_\varsigma$  es el percentil de orden  $100(1-\varsigma)$  de la distribución del estadístico bootstrap

$$T_n^* = \frac{\left[ D_\theta^\varphi(\overline{\mathcal{X}}_n^* + \overline{\mathcal{Y}}_n, \overline{\mathcal{Y}}_n^* + \overline{\mathcal{X}}_n) \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi(\mathcal{X}_i^* + \overline{\mathcal{X}}_n, \mathcal{Y}_i^* + \overline{\mathcal{Y}}_n) \right]^2}.$$

*Demostración.* El resultado se deriva de forma algo más compleja y la demostración se omite porque requeriría la incorporación de nociones (como la covarianza de dos NFAs, etc.) para derivar la distribución asintótica del estadístico (ver González-Rodríguez *et al.* [19]) y de la aproximación bootstrap del Teorema del Límite Central para elementos aleatorios generalizados establecido por Giné y Zinn [16].  $\square$

El contraste bootstrap precedente puede aplicarse algorítmicamente como sigue. Supuesto que  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})_n = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \dots, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n))$  es una muestra de observaciones independientes a partir del conjunto fuzzy aleatorio  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

*Paso 1:* Se calcula el valor del estadístico de contraste,  $T_n$ , para la muestra de datos fuzzy inicial:

$$T_n = \frac{\left[ D_\theta^\varphi\left(\frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n), \frac{1}{n} \cdot (\tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_n)\right) \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi\left(\tilde{x}_i + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_n), \tilde{y}_i + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n)\right) \right]^2}.$$

*Paso 2:* Se fija la población bootstrap,

$$\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \dots, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}.$$

*Paso 3:* Se obtiene una muestra de observaciones independientes de la población bootstrap,  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})_n^* = ((\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)^*, \dots, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)^*)$ , cuyas componentes denotaremos alternativamente por  $((\tilde{x}_1^*, \tilde{y}_1^*), \dots, (\tilde{x}_n^*, \tilde{y}_n^*))$ , denotando así mismo  $\tilde{\mathbf{x}}_n^* = (\tilde{x}_1^*, \dots, \tilde{x}_n^*)$  e  $\tilde{\mathbf{y}}_n^* = (\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*)$ .

*Paso 4:* Se calcula el valor del estadístico para la muestra bootstrap,

$$T_n^* = \frac{\left[ D_\theta^\varphi\left(\overline{\tilde{\mathbf{x}}}_n^* + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_n), \overline{\tilde{\mathbf{y}}}_n^* + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n)\right) \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ D_\theta^\varphi\left(\tilde{x}_i^* + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_n), \tilde{y}_i^* + \frac{1}{n} \cdot (\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n)\right) \right]^2}.$$

*Paso 5:* Se repiten los *Pasos 3* y *4* un número muy grande de veces,  $B$ , para obtener un conjunto de  $B$  estimaciones (valores de  $T_n^*$ ) que se denotará por  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$ .

*Paso 6:* Se halla el  $p$ -valor bootstrap, que corresponderá a la proporción de veces que  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$  es mayor que el valor de  $T_n$  para la muestra inicial.

**Observación 1.4.1.** Es importante resaltar que el  $p$ -valor mantiene la interpretación intuitiva del contraste con datos reales, es decir, es un indicador de la idoneidad de la hipótesis nula (esto es, de lo sostenible que es) a la vista de la información muestral disponible, en el sentido de que cuanto menor sea el  $p$ -valor, se dispondrá de mayores evidencias en contra de dicha hipótesis.

## Capítulo 2

# *Fuzzificación* caracterizadora de la distribución de variables aleatorias reales. Aplicaciones

En este capítulo se estudia la aplicación del valor esperado tipo Aumann presentado en la sección anterior para caracterizar la distribución de una variable aleatoria real. Más concretamente, se comienza introduciendo la idea de *fuzzificación* de una variable aleatoria real y se examina un ejemplo sencillo, como es el de la *fuzzificación* triangular. En este examen se comprueba que, aunque es efectivamente una forma simple de *fuzzificar* valores reales, no resulta útil para las aplicaciones que van a incluirse dentro del capítulo.

### 2.1. *Fuzzificación* de una variable aleatoria real.

#### *Fuzzificación* caracterizadora

Por un proceso de *fuzzificación* va a entenderse en este capítulo un proceso que convierte una cantidad precisa (con valores de número real) en una cantidad imprecisa (con valores de número *fuzzy*). Además, va a denominarse *fuzzificador* a una aplicación que asocia a cada elemento de un conjunto (en particular, a cada número real) un conjunto fuzzy sobre  $\mathbb{R}$  (en particular, un número *fuzzy*).

Cuando se realiza la composición de un *fuzzificador* con una variable aleatoria real, se va a hacer referencia a la terminología de *fuzzificación* o representación *fuzzy* de una variable aleatoria real.

**Definición 2.1.1.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria real asociada al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  un fuzzificador que asocia a cada valor  $x \in \mathbb{R}$  el número fuzzy  $\gamma(x) \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ . Se supondrá que  $\gamma$  es una función medible Borel respecto de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{B}_{D_0^c}$  en  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  en  $\mathbb{R}$ .

Se define la  $\gamma$ -fuzzificación/representación fuzzy  $X$  como el número fuzzy aleatorio:

$$\begin{aligned} \gamma \circ X : \Omega &\rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto \gamma(X(\omega)). \end{aligned}$$

Como ilustración de una fuzzificación de una variable aleatoria puede considerarse la que recurre a un fuzzificador triangular (ver, por ejemplo, Hajian y Styles [21]), similar a la que se recoge en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.1.1.** [FUZZIFICACIÓN TRIANGULAR BALANCEADA] Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria real discreta finita asociada al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  cuya función de probabilidad puede resumirse por  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^k$ , donde los puntos  $x_i$  se suponen ordenados de forma creciente y con distancia  $d$  constante  $x_i = x_{i-1} + d$  ( $i = 2, \dots, k$ ) entre cada dos valores consecutivos.

En este caso, una posible fuzzificación de la variable  $X$  es la representación fuzzy triangular de  $X$  dada por el NFA  $\gamma_T(X)$  con ‘función de probabilidad’ (inducida)  $\{(\tilde{x}_i, p_i)\}_{i=1}^k$ , donde:

- $\tilde{x}_1 = \gamma_T(x_1) = \text{Tri}(x_1, x_1, x_1 + d)$ ,
- $\tilde{x}_i = \gamma_T(x_i) = \text{Tri}(x_i - d, x_i, x_i + d)$ ,  $i = 2, \dots, k - 1$ ,
- $\tilde{x}_k = \gamma_T(x_k) = \text{Tri}(x_k - d, x_k, x_k)$ .

La Figura 2.1 muestra gráficamente la fuzzificación triangular para  $k = 4$ .

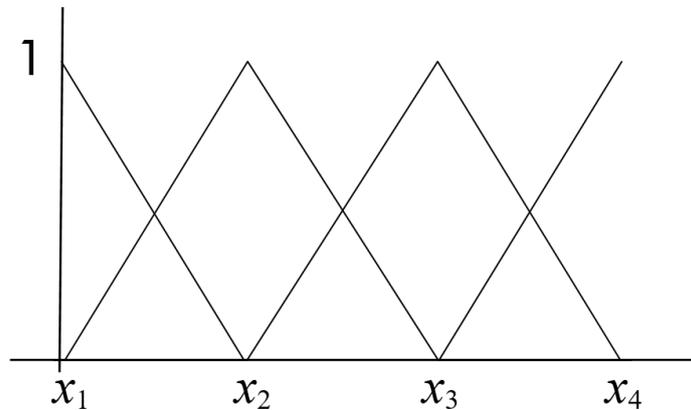


Figura 2.1: Fuzzificación triangular del ejemplo para  $k = 4$

Esta representación resulta útil en muchos contextos, como en los llamados conjuntos de términos lingüísticos balanceados o jerarquías lingüísticas o semánticas (ver, por ejemplo, Herrera y Martínez [22]), que se emplean frecuentemente como una especie de proceso de codificación *fuzzy* de los valores o etiquetas de una escala tipo Likert, alternativo a los procesos más usuales de codificación numérica.

Sin embargo, en un estudio llevado a cabo por Colubi y González-Rodríguez [8] sobre la caracterización de la distribución de una variable aleatoria real mediante la media tipo Aumann de su *fuzzificación* triangular, se ha comprobado que tal posibilidad no es viable, como prueba el resultado siguiente.

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria real discreta asociada al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y cuya función de probabilidad pueda resumirse por  $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^k$ , donde los puntos  $x_i$  se suponen ordenados de forma creciente. Entonces:*

- *si  $k \leq 4$ , la media tipo Aumann de su fuzzificación triangular según lo indicado en el Ejemplo 2.1.1,  $\tilde{E}(\gamma_T(X))$ , caracteriza la distribución de  $X$ ;*
- *si  $k > 4$ , la afirmación anterior no es válida.*

*Demostración.* En efecto, si  $k = 4$  supongamos que existe otra variable aleatoria real discreta  $X^*$  con función de probabilidad  $\{(x_i, p_i^*)\}_{i=1}^k$  y tal que  $\tilde{E}(\gamma_T(X)) = \tilde{E}(\gamma_T(X^*))$ . Dado que la representación *fuzzy* es triangular, los valores esperados anteriores también serán números *fuzzy* triangulares. Precizando más:

$$\tilde{E}(\gamma_T(X)) = \tilde{E}(\gamma_T(X^*)) \Leftrightarrow \text{Tri}(a_X, b_X, c_X) = \text{Tri}(a_{X^*}, b_{X^*}, c_{X^*})$$

con

$$a_X = x_1 p_1 + \sum_{i=2}^3 (x_i - d) p_i + (x_4 - d) p_4, \quad a_{X^*} = x_1 p_1^* + \sum_{i=2}^3 (x_i - d) p_i^* + (x_4 - d) p_4^*,$$

$$b_X = x_1 p_1 + \sum_{i=2}^3 x_i p_i + x_4 p_4, \quad b_{X^*} = x_1 p_1^* + \sum_{i=2}^3 x_i p_i^* + x_4 p_4^*,$$

$$c_X = (x_1 + d) p_1 + \sum_{i=2}^3 (x_i + d) p_i + x_4 p_4, \quad c_{X^*} = (x_1 + d) p_1^* + \sum_{i=2}^3 (x_i + d) p_i^* + x_4 p_4^*,$$

de donde:

$$\begin{cases} (p_2 - p_2^*) + (p_3 - p_3^*) + (p_4 - p_4^*) = 0 \\ x_1(p_1 - p_1^*) + x_2(p_2 - p_2^*) + x_3(p_3 - p_3^*) + x_4(p_4 - p_4^*) = 0 \\ (p_1 - p_1^*) + (p_2 - p_2^*) + (p_3 - p_3^*) = 0 \\ (p_1 - p_1^*) + (p_2 - p_2^*) + (p_3 - p_3^*) + (p_4 - p_4^*) = 0 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado y su única solución es  $p_i = p_i^*$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

En el caso  $k < 4$  se obtendría el mismo resultado razonando en forma análoga.

De igual forma, puede comprobarse que en el caso  $k \geq 5$  el sistema correspondiente sería compatible indeterminado y, por tanto, no caracterizaría la distribución de la variable.  $\square$

Tratando de generalizar la idea de representación *fuzzy* que caracterice la distribución de una variable aleatoria real cualquiera (y no sólo discreta con cuatro valores prefijados) mediante la media tipo Aumann de una representación *fuzzy* oportuna, en González-Rodríguez *et al.* [18] se ha establecido una opción posible.

**Definición 2.1.2.** *Dada una variable aleatoria real  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  asociada al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , sea  $\gamma^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  el fuzzificador definido (en su versión horizontal) para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y  $x \in \mathbb{R}$  por:*

$$(\gamma^C(x))_\alpha := \left[ f_L(x) - (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(x)}}, f_R(x) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_R(x)}} \right]$$

o, alternativamente (en su versión vertical), para todo  $x, t \in \mathbb{R}$  por:

$$\gamma(x)(t) := \begin{cases} 1 - (f_L(x) - t)^{h_L(x)} & \text{si } t \in [f_L(x) - 1, f_L(x)] \\ 1 & \text{si } t \in [f_L(x), f_R(x)] \\ 1 - (t - f_R(x))^{h_R(x)} & \text{si } t \in (f_R(x), f_R(x) + 1] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde las funciones:

$$f_L, f_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_L, h_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \quad f_L(x) \leq f_R(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

son medibles Borel.

Así, la  $\gamma^C$ -representación de  $X$  es el número fuzzy aleatorio:

$$\gamma^C \circ X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$$

$$\omega \mapsto \gamma^C(X(\omega)).$$

El teorema siguiente garantiza que la representación *fuzzy* precedente permite, en condiciones muy generales, caracterizar completamente la distribución de una variable aleatoria cualquiera.

**Teorema 2.1.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\gamma^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  el fuzzificador definido para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y  $x \in \mathbb{R}$  por:

$$\left(\gamma^C(x)\right)_\alpha = \left[ f_L(X) - (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(x)}}, f_R(X) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_R(x)}} \right],$$

donde las funciones:

$$f_L, f_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_L, h_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \quad f_L(x) \leq f_R(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

$$f_L, f_R \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

son todas ellas continuas y biyectivas.

Entonces, si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son dos variables aleatorias asociadas al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , se cumple que:

$$X \text{ e } Y \text{ idénticamente distribuidas} \Leftrightarrow \tilde{E}(\gamma^C \circ X) = \tilde{E}(\gamma^C \circ Y).$$

*Demostración.* En efecto, se cumple para todo  $\alpha \in [0, 1]$  que:

$$\left(\tilde{E}(\gamma^C \circ X)\right)_\alpha = \left[ E\left(f_L(X) - (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(X)}}\right), E\left(f_R(X) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_R(X)}}\right) \right].$$

- Si  $X$  e  $Y$  están idénticamente distribuidas, entonces también lo están las variables aleatorias  $f_L(X)$  y  $f_L(Y)$ ,  $1/h_L(X)$  y  $1/h_L(Y)$ ,  $f_R(X)$  y  $f_R(Y)$  y  $1/h_R(X)$  y  $1/h_R(Y)$  y, en consecuencia, sus medias coinciden, por lo que para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\left(\tilde{E}(\gamma^C \circ X)\right)_\alpha = \left(\tilde{E}(\gamma^C \circ Y)\right)_\alpha,$$

de donde las medias tipo Aumann de sus representaciones *fuzzy* caracterizadoras coinciden.

- Si  $\tilde{E}(\gamma^C \circ X) = \tilde{E}(\gamma^C \circ Y)$ , entonces para todo  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que  $\left(\tilde{E}(\gamma^C \circ X)\right)_\alpha = \left(\tilde{E}(\gamma^C \circ Y)\right)_\alpha$ , de modo que:

$$E\left(f_L(X) - (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(X)}}\right) = E\left(f_L(Y) - (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(Y)}}\right),$$

$$E\left(f_R(X) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_R(X)}}\right) = E\left(f_R(Y) + (1 - \alpha)^{\frac{1}{h_R(Y)}}\right).$$

Por tanto, si se toma  $\alpha = 1$ :

$$E(f_L(X)) = E(f_L(Y)), \quad E(f_R(X)) = E(f_R(Y)).$$

Por ello, debe cumplirse que para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$E\left((1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(X)}}\right) = E\left((1 - \alpha)^{\frac{1}{h_L(Y)}}\right).$$

Si se considera un  $\alpha_0 \in (0, 1)$  arbitrario, basta con probar que las variables aleatorias  $(1 - \alpha_0)^{\frac{1}{h_L(X)}}$  y  $(1 - \alpha_0)^{\frac{1}{h_L(Y)}}$  están idénticamente distribuidas, ya que en dicho caso al ser la función:

$$S_{\alpha_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1 - \alpha_0)^{\frac{1}{h_L(x)}}$$

continua y biyectiva se aseguraría que  $X$  e  $Y$  estarían igualmente distribuidas.

Como  $1 - \alpha_0 \in (0, 1)$ , las variables aleatorias  $S_{\alpha_0}(X)$  y  $S_{\alpha_0}(Y)$  están acotadas, por lo que todos sus momentos existen y son finitos, lo que implica que los conjuntos de dichos momentos caracterizan sus distribuciones.

Denotando para cada  $r \in \mathbb{N}$  la constante  $\alpha_r := 1 - (1 - \alpha_0)^r \in (0, 1)$ , se obtiene que:

$$E((S_{\alpha_0}(X))^r) = E\left[\left((1 - \alpha_0)^{\frac{1}{h_L(X)}}\right)^r\right] = E\left[(1 - \alpha_r)^{\frac{1}{h_L(X)}}\right]$$

$$= E\left[(1 - \alpha_r)^{\frac{1}{h_L(Y)}}\right] = E\left[\left((1 - \alpha_0)^{\frac{1}{h_L(Y)}}\right)^r\right] = E((S_{\alpha_0}(Y))^r).$$

Esta igualdad implica que  $S_{\alpha_0}(X)$  y  $S_{\alpha_0}(Y)$  están idénticamente distribuidas, por lo que el resultado queda demostrado. Conviene observar que, por simetría, si se hubiera considerado el razonamiento análogo para el extremo derecho del intervalo  $\alpha$ -nivel, se habría llegado también al resultado buscado.  $\square$

**Observación 2.1.1.** En la demostración del teorema precedente sólo se hace uso de las funciones  $f_L(X), h_L(X)$  (o, como se ha señalado, alternativamente podía haberse razonado con  $f_R(X), h_R(X)$ ). Esto muestra que, de hecho, basta con una de las ramas de la media tipo Aumann anterior para conocer toda la información sobre la distribución de la *fuzzificación* de la variable aleatoria real.

La elección de las funciones  $f_L, h_L, f_R, h_R$  permite tener distintas representaciones *fuzzy* de variables aleatorias, incluso de forma que su media tipo Aumann muestre, de forma visual, algunos parámetros de la distribución de la variable (ver, por ejemplo, González-Rodríguez *et al.* [18]).

Una elección interesante y operativa dentro de la familia de *fuzzificadores*  $\gamma^C$  es la de los *fuzzificadores*  $\gamma^s$ , para los cuales  $f_L(x) = f_R(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y

$$h_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{a}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 1 - \frac{x - x_0}{a} & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

$$h_R(x) = \frac{1}{h_L(x)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

con  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $a \in (0, +\infty)$ . En esta subfamilia,  $x_0$  constituye una especie de punto de ‘simetría’ (más concretamente, si la distribución de la variable aleatoria  $X$  es simétrica con respecto de  $x_0$ , entonces la media tipo Aumann de la representación  $\gamma^s$  de  $X$  también será simétrica con respecto de  $x_0$ ), y  $a$  viene a ser una especie de ‘factor de ponderación inversa’ de la dispersión de los valores *fuzzy* (i.e., si la distribución de  $X$  es asimétrica, cuanto menor sea el valor de  $a$  la asimetría resultará visualmente más evidente).

La Figura 2.2 muestra gráficamente la *fuzzificación*  $\gamma^s$  de una variable aleatoria que toma los valores  $-2, -1, 0, 1$  y  $2$ , supuestos fijados  $x_0 = 0$  y  $a = 1$ .

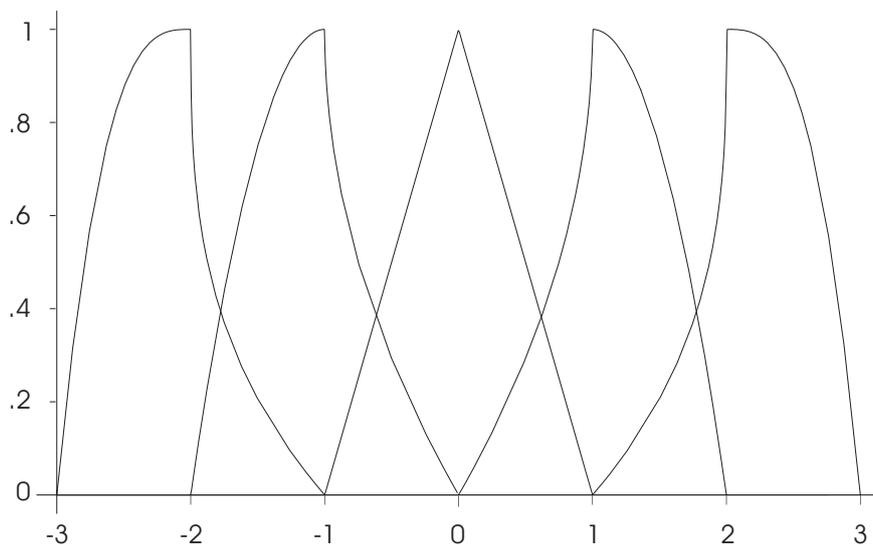


Figura 2.2: *Fuzzificación*  $\gamma^s$  (con  $x_0 = 0$  y  $a = 1$ ) de una variable aleatoria que toma los valores  $-2, -1, 0, 1$  y  $2$

Como puede verse en la Figura 2.2, las formas de los números *fuzzy* asignados a los valores de la variable difieren, según se trate de valores centrales o se alejen más o menos de los mismos. Este hecho resulta bastante razonable, por cuanto el significado de los valores numéricos subyacentes también difiere según su posición.

Para ilustrar la caracterización de una distribución mediante la media tipo Aumann de su representación *fuzzy*  $\gamma^s$ , la Figura 2.3 muestra las medias correspondientes a las  $\gamma^s$  de tres variables binomiales, Binomial(10, 0.1), Binomial(10, 0.5) y Binomial(10, 0.9), tomando  $x_0 = 5$  (punto de posición intermedia entre los valores de la distribución) y  $a = 1$ .

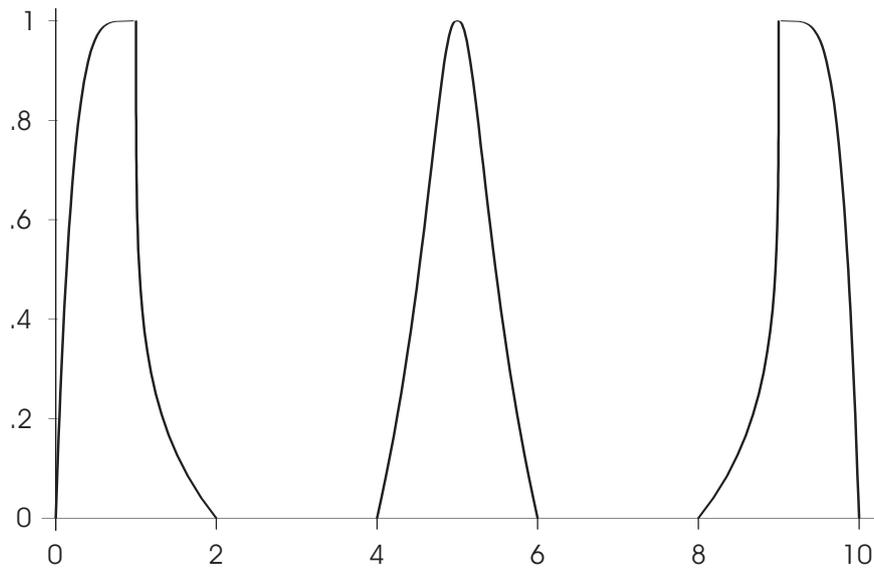


Figura 2.3: Media tipo Aumann de la *fuzzificación*  $\gamma^s$  (con  $x_0 = 5$  y  $a = 1$ ) de una variable aleatoria que sigue distribución binomial (de izquierda a derecha: Binomial(10, 0.1), Binomial(10, 0.5) y Binomial(10, 0.9))

Del mismo modo, la Figura 2.4 muestra las medias correspondientes a las  $\gamma^s$  de tres variables normales,  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\mathcal{N}(0, 2)$  y  $\mathcal{N}(1, 1)$ , tomando  $x_0 = 0$  (punto de posición intermedia entre los valores de la distribución) y  $a = 1$ .

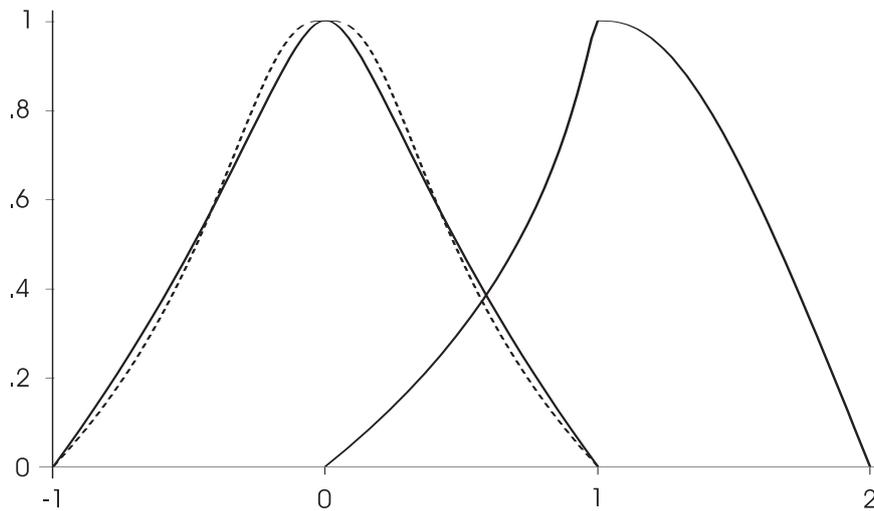


Figura 2.4: Media tipo Aumann de la *fuzzificación*  $\gamma^s$  (con  $x_0 = 0$  y  $a = 1$ ) de una variable aleatoria que sigue distribución normal (de izquierda a derecha:  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\mathcal{N}(0, 2)$  (con trama de guiones) y  $\mathcal{N}(1, 1)$ )

Como consecuencia de los resultados de esta sección, se ha presentado un nuevo funcional de caracterización general de la distribución de una variable aleatoria real, alternativo a la función de distribución y a la función característica. La función de distribución (de variable real y con valores en  $[0, 1]$ ) se basa directamente en probabilidades asociadas a los sucesos basados en ella. La función característica (de variable real y con valores en el espacio de los complejos) se apoya en el operador media, pero toma valores en el campo de los complejos.

Si bien la media tipo Aumann de una representación *fuzzy*  $\gamma^C$  constituye un funcional caracterizador de la distribución de una variable aleatoria que pasa por el espacio de los números *fuzzy*, se trata de una función de variable real con valores en  $[0, 1]$  y, a su vez, tiene su base en un valor medio, de manera que hereda las buenas propiedades de consistencia, así como otras características propias de tal valor medio. En este sentido, se trata de un funcional caracterizador con propiedades de gran interés estadístico.

En las dos secciones siguientes, se examinará la aplicación del potencial caracterizador de la distribución de variables aleatorias reales que tiene la representación *fuzzy*  $\gamma^C$ , para realizar algunos contrastes estadísticos clásicos, como pueden ser el test de bondad de ajuste de la distribución de una variable aleatoria real a una distribución totalmente especificada y el test de simetría de la distribución de una variable respecto de un punto específico.

## 2.2. Aplicación al contraste de bondad de ajuste

Uno de los principales problemas en Estadística es la realización de inferencias sobre propiedades de una población a partir de una muestra extraída de la misma. En particular, en el caso de estimaciones o contraste de parámetros de la distribución de una variable en una población, es necesario incorporar a menudo cierta suposición acerca de la distribución de dicha variable, como puede ser que se trata de una distribución normal, binomial, Poisson, exponencial, etc. Esta suposición es frecuentemente imprescindible para la aplicación de los estadísticos que permiten desarrollar inferencias. En otras situaciones, el interés de un estudio se centra de forma expresa en conocer si se puede considerar que los datos recopilados por la observación de la variable corresponden a cierto modelo conocido.

Un *test de bondad de ajuste* univariante a una distribución es un procedimiento que consiste en contrastar si (o hasta qué punto) cierta variable sigue una distribución hipotética, sobre la base de los datos disponibles a partir de su observación.

Dicha distribución hipotética puede estar o no completamente especificada. En esta sección el contraste va a considerar la primera posibilidad, de manera que la hipótesis nula se supondrá totalmente especificada, es decir, no hay parámetros que necesiten estimarse y se trata de una hipótesis simple.

Entre los procedimientos de contraste de bondad de ajuste para el caso de distribuciones totalmente especificadas y que no estén diseñados para clases paramétricas concretas, los que posiblemente estén considerados como más populares podrían clasificarse en dos grupos:

- contrastes aplicables a variables discretas finitas o a variables cualesquiera tras su ‘discretización’ finita, como son los test  $\chi^2$  de Pearson y de la razón de verosimilitudes;
- contrastes aplicables a variables y distribuciones hipotéticas continuas, como son los test de Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises y Anderson-Darling.

Los test  $\chi^2$  de Pearson y de la razón de verosimilitudes pueden considerarse, en principio, para distribuciones hipotéticas discretas con un número finito de valores o cualesquiera, pero tras el agrupamiento tanto de los valores hipotéticos como de los datos muestrales en un número finito de clases disjuntas. Ambos métodos de contraste se basan en sendos estadísticos que involucran el cálculo de las frecuencias observadas de los distintos valores o clases para la información muestral coleccionada y el de las frecuencias esperadas para dichos valores o clases de acuerdo con la distribución hipotética.

Los estadísticos cuantifican la ‘discrepancia’ entre tales frecuencias, y la distribución de los mismos se conoce de forma asintótica (de hecho, los dos estadísticos son asintóticamente equivalentes) y es de tipo chi-cuadrado. Como región crítica del contraste, se toman los valores críticos obtenidos a partir de la chi-cuadrado y se considera que la hipótesis nula debe rechazarse para un nivel de significación dado si la discrepancia entre la hipótesis nula y las evidencias muestrales está por encima del valor crítico ‘admisibles’. Alternativamente, puede calcularse el  $p$ -valor del contraste para los datos muestrales, que es el umbral mínimo del nivel de significación por encima del cual se rechaza la hipótesis nula sobre la base de esos datos.

Es inmediato notar que, en el caso de que la distribución hipotética sea continua o discreta con una infinidad de posibles valores distintos, el ineludible agrupamiento de datos y valores hipotéticos en un número finito de clases conlleva siempre una pérdida de información que, en ocasiones, puede ser relevante. Además, la aplicación apropiada de estos contrastes requiere el cumplimiento de algunas condiciones adicionales que, a veces, obliga a un nuevo reagrupamiento.

Los *test de Kolmogorov-Smirnov*, *Cramér-Von Mises* y *Anderson-Darling* están desarrollados para el ajuste a una distribución hipotética de tipo continuo y totalmente especificada. Se basan en la función de distribución empírica para la muestra de datos disponible y en las propiedades que dicha función ofrece como estimador de la función de distribución teórica, es decir, la asociada al modelo hipotético.

Los estadísticos de los tres métodos cuantifican la ‘discrepancia’ (a través de ciertas normas o normas relativizadas) entre tales funciones de distribución, y la distribución de los mismos es conocida (si bien suelen adoptar expresiones de cierta complejidad para tamaños muestrales pequeños, normalmente presentan aproximaciones asintóticas más manejables). Como región crítica del contraste, se toman los valores críticos obtenidos a partir de tablas desarrolladas expresamente para pequeñas muestras o sus aproximaciones asintóticas para grandes muestras, y se considera que la hipótesis nula debe rechazarse para un nivel de significación dado si la discrepancia entre las funciones de distribución esperada y observada está por encima del valor crítico ‘admisible’. Alternativamente, puede calcularse el  $p$ -valor del contraste para los datos muestrales.

El test de Kolmogorov-Smirnov se basa en la norma del supremo y, en consecuencia, no tiene en cuenta las discrepancias en todos los puntos reales, mientras que Cramér-Von Mises y Anderson-Darling recurren a integrales que sí toman en consideración las discrepancias en todos los puntos reales. El test de Kolmogorov-Smirnov y el de Cramér-Von Mises son menos potentes que el de Anderson-Darling para detectar diferencias en las colas de las distribuciones, ya que no suelen estar presentes en las muestras escogidas y los estadísticos no les asignan suficiente peso. Por el contrario, los dos primeros son más útiles para detectar diferencias en la parte central de las distribuciones.

Como se ha señalado recientemente [41], no existe un test de bondad de ajuste general que sea uniformemente más potente para todas las combinaciones posibles de hipótesis nulas (totalmente especificadas) y alternativas.

Al ser el funcional  $\tilde{E}(\gamma^C(X))$  introducido en la sección anterior caracterizador de la distribución de la variable aleatoria  $X$ , sea cual sea el tipo de variable al que corresponda, puede desarrollarse de forma bastante inmediata un método de contraste de bondad de ajuste para variables aleatorias reales a una distribución totalmente especificada sobre la base de un estadístico que cuantifique la ‘discrepancia’ entre las medias tipo Aumann de la representación  $\gamma^C$  de la distribución hipotética y la de

la distribución muestral. Tal estadístico constituirá una medida de la ‘discrepancia’ entre las dos distribuciones.

Este método es el consistente en la particularización del test unimuestral para la media tipo Aumann (Proposición 1.4.1) sobre la  $\gamma^C$ -fuzzificación de la variable aleatoria real. A continuación va a procederse a presentar esa particularización, indicando algunas peculiaridades del mismo e ilustrando su aplicación mediante un ejemplo real.

Sean  $X$  una variable aleatoria real cualquiera,  $\mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0)$  una distribución aleatoria totalmente especificada donde  $\boldsymbol{\mu}_0$  denota un parámetro real o vectorial conocido y  $\gamma^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  un *fuzzificador* caracterizador cualquiera. Sea  $\theta \in (0, 1]$  y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ .

Los estudios de la Sección 2.1 corroboran que contrastar las hipótesis sobre distribuciones:

- $H_0 : X \equiv \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0)$  (hipótesis nula simple)
- $H_1 : X \not\equiv \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0)$  (hipótesis alternativa compuesta)

es equivalente a contrastar las hipótesis

- $H_0 : \tilde{E}(\gamma^C \circ X) = \tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0))$
- $H_1 : \tilde{E}(\gamma^C \circ X) \neq \tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0))$

que, a su vez, equivale a contrastar las hipótesis:

- $H_0 : D_\theta^\varphi(\tilde{E}(\gamma^C \circ X), \tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0))) = 0$
- $H_1 : D_\theta^\varphi(\tilde{E}(\gamma^C \circ X), \tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0))) \neq 0.$

Como  $\gamma^C \circ X$  es un número *fuzzy* aleatorio y  $\tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0))$  es un número *fuzzy* concreto, la aplicación del test unimuestral para la media tipo Aumann en la Proposición 1.4.1 da lugar a un procedimiento de contraste de bondad de ajuste, cuya versión algorítmica se traduce ahora como sigue:

Sea  $X$  la variable aleatoria real cuya distribución quiere ajustarse a la hipotética  $\mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0)$ , y sea  $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  una muestra de observaciones independientes a partir de  $X$ . Los siguientes pasos constituyen un algoritmo para el contraste de la hipótesis nula  $H_0 : X \equiv \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mu}_0)$ .

*Paso 1:* Se calcula el valor del estadístico de contraste,  $T_n$ , para la muestra de datos inicial  $\gamma^C$ -fuzzificados,  $\gamma^C(\mathbf{x}_n) = (\gamma^C(x_1), \dots, \gamma^C(x_n))$ :

$$T_n = \frac{\left[ D_{\theta}^{\varphi} \left( \frac{1}{n} \cdot (\gamma^C(x_1) + \dots + \gamma^C(x_n)), \tilde{E}(\gamma^C \circ \mathfrak{D}(\mu_0)) \right) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ D_{\theta}^{\varphi} \left( \gamma^C(x_i), \frac{1}{n} \cdot (\gamma^C(x_1) + \dots + \gamma^C(x_n)) \right) \right]^2}.$$

*Paso 2:* Se fija la población bootstrap,  $\{\gamma^C(x_1), \dots, \gamma^C(x_n)\}$ .

*Paso 3:* Se obtiene una muestra de observaciones independientes de la población bootstrap,  $\gamma^C(\mathbf{x}_n)^* = (\gamma^C(x_1)^*, \dots, \gamma^C(x_n)^*)$ .

*Paso 4:* Se calcula el valor del estadístico para la muestra bootstrap,

$$T_n^* = \frac{\left[ D_{\theta}^{\varphi} \left( \frac{1}{n} \cdot [\gamma^C(x_1)^* + \dots + \gamma^C(x_n)^*], \frac{1}{n} \cdot [\gamma^C(x_1) + \dots + \gamma^C(x_n)] \right) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ D_{\theta}^{\varphi} \left( \gamma^C(x_i)^*, \frac{1}{n} \cdot (\gamma^C(x_1)^* + \dots + \gamma^C(x_n)^*) \right) \right]^2}.$$

*Paso 5:* Se repiten los *Pasos 3* y *4* un número muy grande de veces,  $B$ , para obtener un conjunto de  $B$  estimaciones (valores de  $T_n^*$ ) que se denotará por  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$ .

*Paso 6:* Se halla el  $p$ -valor bootstrap, que corresponderá a la proporción de veces que  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$  es mayor que el valor de  $T_n$  para la muestra inicial.

El procedimiento de contraste que acaba de presentarse va a ilustrarse mediante un ejemplo real. Por el bagaje del que se dispone parece interesante recurrir a un ejemplo físico con datos reales. Para ello, se aplicará el último test de bondad de a la distribución de sucesos obtenidos por desintegración radiactiva. Se comenzará introduciendo brevemente el problema y la motivación de las medidas realizadas, tras lo que se incluirá una breve descripción de los datos seguido de la aplicación del test a este caso particular.

**Ejemplo 2.2.1.** La radiactividad es el proceso en que núcleos atómicos inestables emiten energía, por ejemplo, por emisión de una partícula  $\alpha$  (núcleo de  $He$ ) o un fotón. Esta desintegración no es cuantificable como la mayoría de los procesos físicos a los que estamos acostumbrados, sino que tiene una componente inherente puramente probabilística. Esto es debido a los resultados de *Mecánica Cuántica*, que impiden predecir cuándo un núcleo atómico radiactivo se desintegrará. Sin embargo, se puede obtener para una colección de átomos una estimación de su *tiempo de vida*: el tiempo que tardaría dicha colección en desintegrarse completamente. La relación que rige este comportamiento es:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde  $N(t)$  denota la cantidad de núcleos en el instante  $t$ ,  $N_0$  el número inicial de núcleos y  $\lambda$  es la *constante de desintegración*, que indica la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo.

Una de las formas de determinar la constante  $\lambda$  para un cierto isótopo y así poder predecir el *tiempo de vida* de una cierta muestra es estudiar el número de desintegraciones radiactivas que sufre en un intervalo de tiempo prefijado. Sin embargo, para poder realizar este estudio es necesario tener en cuenta las posibles desintegraciones de *fondo*, que podrían influir en la medida. Por tanto, es posible modelar el **número de desintegraciones radiactivas** en un cierto intervalo temporal como una distribución de **Poisson**, ya que sería equivalente a modelar el tiempo de desintegración de la muestra como una distribución *exponencial* (este hecho muestra el porqué de la denominación de ‘*Ley de los sucesos raros*’ a la distribución Poisson).

Por ello, en este apartado se realizará un contraste de bondad de ajuste de los datos experimentales a la distribución teórica para el caso de **estimación de fondos**. Para ello se cuenta con datos obtenidos con un detector Geiger-Müller conectado a una fuente de alimentación fijada a un voltaje de 1000 V; este valor asegura la maximización de la eficiencia del detector. Dichos datos se tomaron en el año 2017, en la práctica ‘*Estudio de radiación con Geiger-Müller*’ de la asignatura «*Técnicas Experimentales III*» del Grado de Física de la Universidad de Oviedo.

Para los datos concernientes a este apartado del trabajo, se dispone de 100 medidas de sucesos tomadas en intervalos de dos segundos. Dichos valores se recogen, agrupados por número de sucesos en cada intervalo, en la Tabla 2.1.

Desintegraciones observadas	0	1	2	3	4	5	$\geq 6$
Número de observaciones	26	45	21	5	2	1	0

Tabla 2.1: Número de desintegraciones radiactivas de fondo observadas en intervalos temporales de 2 segundos (agrupadas)

En tal caso, si  $X$  es la variable aleatoria que representa el **número de desintegraciones radiactivas de fondo observadas en intervalos temporales de 2 segundos** va a realizarse el contraste:

- $H_0 : X \equiv \text{Poisson}(1)$
- $H_1 : X \not\equiv \text{Poisson}(1)$

Para el procedimiento de contraste van a adoptarse  $\theta = 1$ ,  $\varphi = \ell$  para la distancia, y  $\gamma^C = \gamma^{sim}$  como *fuzzificador* caracterizador, donde  $f_L(x) = f_R(x) = x$  y  $h_L(x) = h_R(x) = 1/(1+x)$  para todo  $x \geq 0$ ,  $= 1-x$  en caso contrario. Con esa *fuzzificación* se cumple para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\left(\gamma^{sim}(0)\right)_\alpha = [0, 1 - \alpha], \quad \left(\gamma^{sim}(i)\right)_\alpha = \left[i - (1 - \alpha)^{i+1}, i + (1 - \alpha)^{i+1}\right], \quad i = 1, 2, \dots,$$

y los valores transformados se representan gráficamente en la Figura 2.5

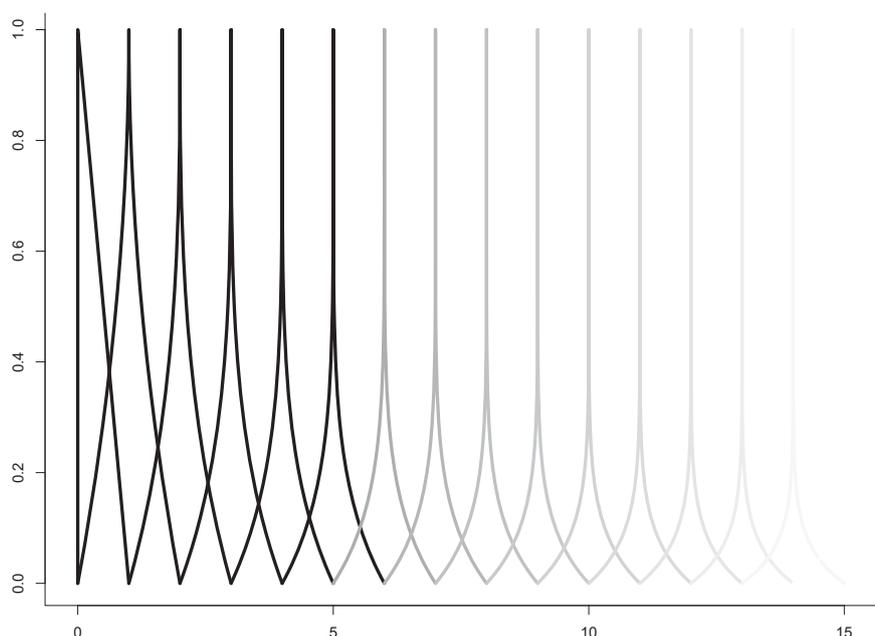


Figura 2.5:  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación (con  $x_0 = 0$  y  $a = 1$ )  
de una variable aleatoria que toma los valores  $0, 1, 2, \dots$   
(en negro la  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de los valores que han aparecido en la muestra)

Como se apuntó en la Observación 2.1.1, el rasgo caracterizador de las  $\gamma^C$  viene determinado por cualquiera de sus ramas, de manera que por razones de simplificación de cálculos en el contraste se han supuesto  $h_L$  y  $h_R$  coincidentes.

Y la media tipo Aumann de la distribución hipotética  $\gamma^{sim}$ -fuzzificada vendrá dada por (ver en Figura 2.6 junto con la correspondiente muestral):

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{E}\left(\gamma^{sim}(\text{Poisson}(1))\right)\right)_\alpha \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left(i - (1 - \alpha)^{i+1}\right) \frac{e^{-1}}{i!}, \sum_{i=0}^{\infty} \left(i + (1 - \alpha)^{i+1}\right) \frac{e^{-1}}{i!} \right] \\ &= \left[ 1 - (1 - \alpha)(e^{-\alpha} - e^{-1}), 1 + (1 - \alpha)e^{-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

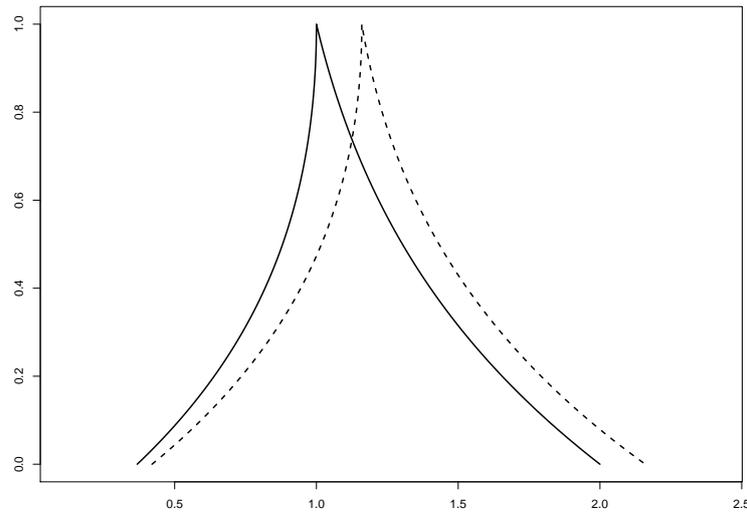


Figura 2.6: Medias tipo Aumann de la  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de una variable aleatoria con distribución Poisson(1) (línea continua) y de la distribución muestral de la Tabla 2.1 (línea con guiones)

La aplicación del algoritmo asociado al contraste de bondad de ajuste (implementado por Trutschnig y Lubiano en R [43, 44]), con  $B = 1000$  iteraciones bootstrap, da lugar a un  $p$ -valor de 0.16, de manera que, a la vista de las evidencias muestrales y para los niveles de significación más usuales, no es descartable que los datos puedan provenir de una distribución de Poisson(1).

### 2.3. Aplicación al contraste de simetría

Otro problema de interés en Estadística es el contraste de la hipótesis de simetría de la distribución de una variable aleatoria real respecto de un punto real dado. El empleo de las medidas de localización o escala más usuales de una variable aleatoria no es muy representativo cuando se trabaja con distribuciones asimétricas. No obstante, la estadística robusta puede trabajar con distribuciones asimétricas porque no recurre a las medidas de localización o escala más usuales, sino que busca alternativas que no se vean influenciadas en exceso por dicha asimetría. En cualquiera de los casos es conveniente conocer si existe o no simetría de la distribución de una variable  $y$ , al igual que para la bondad de ajuste, hay distintos test que permiten contrastar este tipo de hipótesis.

Entre los procedimientos de contraste de la simetría de la distribución de una variable aleatoria sobre la base de una muestra de observaciones independientes a partir de ella, el *test de los rangos con signo de Wilcoxon* es uno de los más conocidos.

Se basa en un estadístico que consiste en la diferencia entre la suma de los ‘rangos’ de las diferencias de los datos muestrales respecto del punto de simetría hipotético que son positivas y la suma de los ‘rangos’ de las diferencias de los datos muestrales respecto del punto de simetría hipotético que son negativas, donde por el ‘rango’ de una diferencia se entiende su posición en la sucesión ordenada en sentido creciente de los valores absolutos de las diferencias antedichas. Existe una tabla de valores críticos del estadístico de rangos de Wilcoxon con la cual puede compararse el del estadístico, salvo que se recurra a la aproximación normal, aunque ésta suele ser bastante conveniente. Si el estadístico muestral de Wilcoxon está por debajo del valor crítico de las tablas, debe rechazarse la hipótesis nula de simetría alrededor del punto de simetría hipotético. El test está desarrollado para variables de tipo continuo.

Que la distribución de una variable aleatoria real  $X$  sea simétrica respecto de un punto específico  $\tau$  podría interpretarse indistintamente como que la variable  $X - \tau$  es simétrica respecto de 0 o que las variables  $X - \tau$  y  $\tau - X$  están idénticamente distribuidas. Al ser el funcional  $\tilde{E}(\gamma^C(X))$ , introducido en la primera sección de este capítulo, caracterizador de la distribución de la variable aleatoria  $X$ , sea cual sea el tipo de variable al que corresponda, puede desarrollarse de forma bastante inmediata un método de contraste de simetría de la distribución de  $X$  respecto de  $\tau$  sobre la base de un estadístico que cuantifique la ‘discrepancia’ entre las medias tipo Aumann de la representación  $\gamma^C$  de  $X - \tau$  y la de  $\tau - X$ , que son dos variables claramente dependientes. Tal estadístico constituirá una medida de la ‘discrepancia’ con la simetría de  $X$  respecto de  $\tau$ .

Este método es el consistente en la particularización del test bimuestral para la igualdad de medias tipo Aumann de dos números *fuzzy* aleatorios dependientes (Proposición 1.4.2) sobre la  $\gamma^C$ -fuzzificación de ambas variables aleatorias reales. A continuación va a procederse a presentar esa particularización, indicando algunas peculiaridades del mismo e ilustrando su aplicación mediante un ejemplo real.

Sean  $X$  una variable aleatoria real cualquiera,  $\tau \in \mathbb{R}$  un punto real totalmente especificado y  $\gamma^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$  un *fuzzificador* caracterizador cualquiera. Sea  $\theta \in (0, 1]$  y sea  $\varphi$  una medida de ponderación normalizada en el espacio  $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$  formalizada como una medida de probabilidad asociada a una función de distribución absolutamente continua y estrictamente creciente en  $[0, 1]$ .

Los estudios de la Sección 2.1 corroboran que contrastar las hipótesis sobre distribuciones:

- $H_0$  :  $X$  tiene distribución simétrica respecto a  $\tau$
- $H_1$  :  $X$  tiene distribución no simétrica respecto a  $\tau$

es equivalente a contrastar las hipótesis

- $H_0$  :  $X - \tau \equiv \tau - X$
- $H_0$  :  $X - \tau \neq \tau - X$

que, a su vez, es equivalente a contrastar las hipótesis

- $H_0$  :  $\tilde{E}(\gamma^C(X - \tau)) = \tilde{E}(\gamma^C(\tau - X))$
- $H_1$  :  $\tilde{E}(\gamma^C(X - \tau)) \neq \tilde{E}(\gamma^C(\tau - X))$

y, a su vez, equivale a contrastar las hipótesis:

- $H_0$  :  $D_\theta^\varphi(\tilde{E}(\gamma^C(X - \tau)), \tilde{E}(\gamma^C(\tau - X))) = 0$
- $H_1$  :  $D_\theta^\varphi(\tilde{E}(\gamma^C(X - \tau)), \tilde{E}(\gamma^C(\tau - X))) \neq 0$ .

Antes de proceder a presentar el procedimiento de contraste, se ilustra gráficamente el cálculo de la  $D_\theta^\varphi(\tilde{E}(\gamma^C(X - \tau)), \tilde{E}(\gamma^C(\tau - X)))$  para ciertas distribuciones particulares, y supuesto que se adoptan  $\theta = 1$ ,  $\varphi = \ell$ , y  $\gamma^C = \gamma^{s_0}$  con  $f_L(x) = f_R(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y

$$h_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h_R(x) = \frac{1}{h_L(x)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En el caso en que  $X \equiv \mathcal{N}(4, 1)$ , es decir, se trata de una distribución simétrica respecto de 4, las medias tipo Aumann de las  $\gamma^{s_0}$ -fuzzificaciones de  $X - 4$  y  $4 - X$  coinciden, de manera que  $D_1^\ell(\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4)), \tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))) = 0$  (ver Figura 2.7).

En el caso en que  $X \equiv \chi_4^2$ , es decir, se trata de una distribución asimétrica con media igual a 4, las medias tipo Aumann de las  $\gamma^{s_0}$ -fuzzificaciones de  $X - 4$  y  $4 - X$  no coinciden, y  $D_1^\ell(\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4)), \tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))) = 0.0057$  (ver Figura 2.8).

En el caso en que  $X \equiv 0.5 \cdot \mathcal{N}(4, 1) + 0.5 \cdot \chi_4^2$ , es decir, se trata de una mixtura de una distribución simétrica y una asimétrica con media igual a 4, las medias tipo Aumann de las  $\gamma^{s_0}$ -fuzzificaciones de  $X - 4$  y  $4 - X$  no coinciden, y  $D_1^\ell(\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4)), \tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))) = 0.0014$  (ver Figura 2.9).

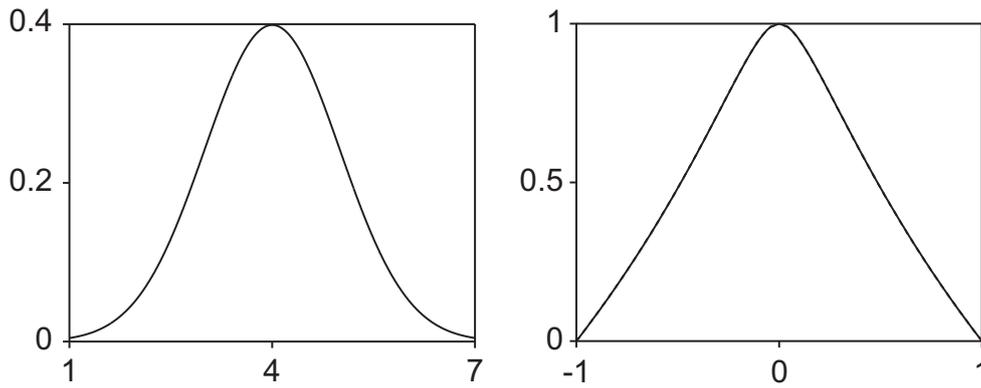


Figura 2.7: A la izquierda, función de densidad de  $\mathcal{N}(4, 1)$ ,  
a la derecha  $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4)) = \tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$

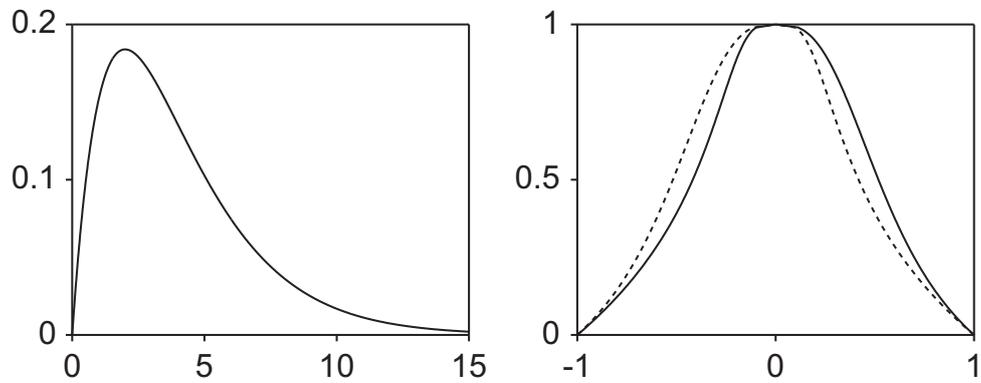


Figura 2.8: A la izquierda, función de densidad de  $\chi_4^2$ ,  
a la derecha  $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4))$  y  $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$

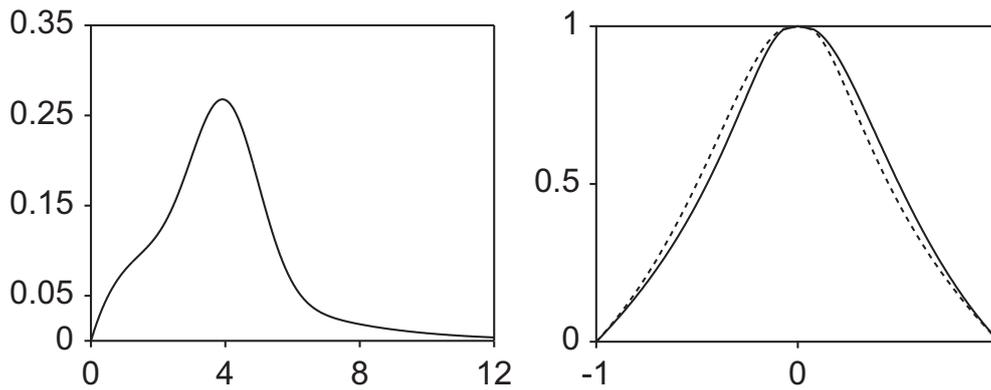


Figura 2.9: A la izquierda, función de densidad de  $0.5 \cdot \mathcal{N}(4, 1) + 0.5 \cdot \chi_4^2$ ,  
a la derecha  $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(X - 4))$  y  $\tilde{E}(\gamma^{s_0}(4 - X))$

Debe tenerse en cuenta que la elección  $f_L(x) = f_R(x) = x$  y  $x_0 \neq 0$  considerada en  $\gamma^s$  aporta información visual acerca del valor medio de la variable original  $X$ , que es la ‘moda’ (el único elemento del conjunto unitario correspondiente a su 1-nivel) de

la media tipo Aumann de la  $\gamma^s$ -fuzzificación de la variable. En contraste, la elección  $f_L(x) = f_R(x) = 0$  y  $x_0 = 0$ , frente a  $f_L(x) = f_R(x) = x$  y  $x_0 \neq 0$  considerada en  $\gamma^{s_0}$ , resulta más oportuna computacionalmente y ofrece la misma información relevante a efectos de la diferencia entre las medias tipo Aumann de las fuzzificaciones de  $X - \tau$  y  $\tau - X$ .

Sea  $X$  la variable aleatoria real cuya distribución quiere contrastarse si es simétrica respecto de  $\tau \in \mathbb{R}$ , y sea  $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  una muestra de observaciones independientes a partir de  $X$ . Los siguientes pasos constituyen un algoritmo para el contraste de la hipótesis nula  $H_0 : X$  tiene distribución simétrica respecto a  $\tau$ . La particularización del estadístico del test bimuestral sobre la media tipo Aumann para muestras dependientes es:

*Paso 1:* Denotándose  $\tilde{\mathbf{v}}_n = (\gamma^C(x_1 - \tau), \dots, \gamma^C(x_n - \tau))$  y  $\tilde{\mathbf{w}}_n = (\gamma^C(\tau - x_1), \dots, \gamma^C(\tau - x_n))$ , se calcula el valor del estadístico de contraste para la muestra de datos *fuzzy* inicial:

$$T_n = \frac{[D_\theta^\varphi(\tilde{\mathbf{v}}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n)]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_\theta^\varphi(\gamma^C(x_i - \tau) + \tilde{\mathbf{w}}_n, \gamma^C(\tau - x_i) + \tilde{\mathbf{v}}_n)]^2}.$$

*Paso 2:* Se fija la población bootstrap,  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

*Paso 3:* Se obtiene una muestra de observaciones independientes de la población bootstrap,  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ .

*Paso 4:* Denotándose  $\tilde{\mathbf{v}}_n^* = (\gamma^C(x_1^* - \tau), \dots, \gamma^C(x_n^* - \tau))$  y  $\tilde{\mathbf{w}}_n^* = (\gamma^C(\tau - x_1^*), \dots, \gamma^C(\tau - x_n^*))$ , se calcula el valor del estadístico para la muestra bootstrap dado por:

$$T_n^* = \frac{[D_\theta^\varphi(\tilde{\mathbf{v}}_n^* + \tilde{\mathbf{w}}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n^* + \tilde{\mathbf{v}}_n)]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_\theta^\varphi(\gamma^C(x_i^* - \tau) + \tilde{\mathbf{w}}_n, \gamma^C(\tau - x_i^*) + \tilde{\mathbf{v}}_n)]^2}.$$

*Paso 5:* Se repiten los *Pasos 3* y *4* un número muy grande de veces,  $B$ , para obtener un conjunto de  $B$  estimaciones (valores de  $T_n^*$ ) que se denotará por  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$ .

*Paso 6:* Se halla el  $p$ -valor bootstrap, que corresponderá a la proporción de veces que  $\{t_1^*, \dots, t_B^*\}$  es mayor que el valor de  $T_n$  para la muestra inicial.

En este apartado se ilustra con un ejemplo del contraste de simetría que acaba de presentarse. Para ello, se hará uso del problema descrito en el Ejemplo 2.2.1 de la Sección 2.2 sobre la desintegración radiactiva.

**Ejemplo 2.3.1.** Siguiendo el hilo mostrado en el Ejemplo 2.2.1, van a emplearse los datos mostrados en la Tabla 2.1 para realizar un contraste de simetría sobre la variable aleatoria que representan. En la sección anterior, se obtuvo un  $p$ -valor de 0.16 en el contraste de datos provenientes de una distribución de Poisson(1). En este ejemplo, se supondrán provenientes de una distribución que con valores enteros no negativos y se comprobará si dicha distribución es simétrica respecto al punto  $\tau = 1$  para la muestra dada (que equivaldrá a que las variables  $X - 1$  y  $1 - X$ , que toman valores enteros, estén idénticamente distribuidas). Este ejemplo está basado en que el test empleado es de *libre distribución* y, por tanto, no depende de la distribución de la que provengan los datos empleados.

Por tanto, si  $X$  es la variable aleatoria que representa el **número de desintegraciones radiactivas de fondo observadas en intervalos temporales de 2 segundos**, se realizará el contraste:

- $H_0$  :  $X$  tiene distribución simétrica respecto de  $\tau = 1$
- $H_1$  :  $X$  tiene distribución no simétrica respecto de  $\tau = 1$

Para el procedimiento de contraste van a adoptarse  $\theta = 1$ ,  $\varphi = \ell$  para la distancia, y  $\gamma^C = \gamma^{sim}$  como *fuzzificador* caracterizador, donde  $f_L(x) = f_R(x) = x$  y  $h_L(x) = h_R(x) = 1/(1 + x)$  para todo  $x \geq 0$ ,  $= 1 - x$  en caso contrario.

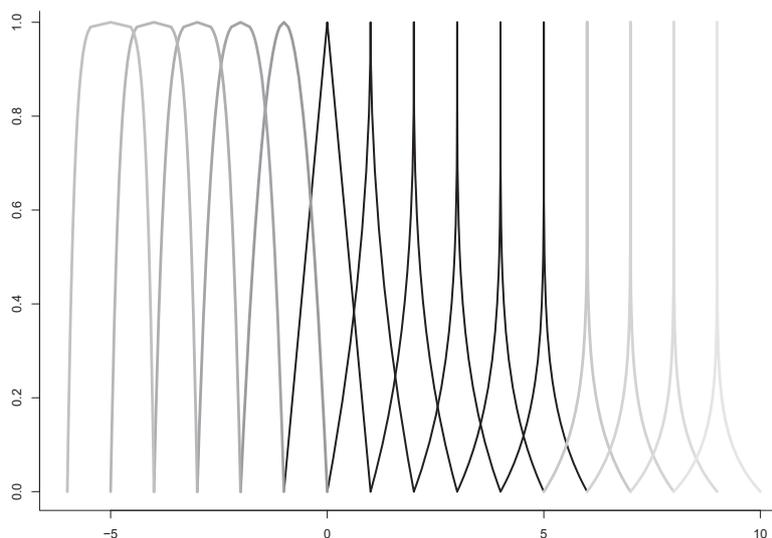


Figura 2.10:  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación (con  $x_0 = 0$  y  $a = 1$ )  
de una variable aleatoria que toma los valores  $\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$   
(en negro la  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de los valores que han aparecido en la muestra)

Con esa *fuzzificación* se cumple para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\left(\gamma^{sim}(i)\right)_\alpha = \begin{cases} [i - (1 - \alpha)^{i+1}, i + (1 - \alpha)^{i+1}] & \text{si } i = 0, 1, 2, \dots \\ [i - (1 - \alpha)^{1/(1-i)}, i + (1 - \alpha)^{1/(1-i)}] & \text{si } i = -1, -2, \dots \end{cases}$$

y los valores transformados se representan gráficamente en la Figura 2.10.

Y las medias tipo Aumann de las distribuciones muestrales  $\gamma^{sim}$ -fuzzificada de  $X - 1$  y  $1 - X$  vendrán dadas por los números *fuzzy* en la Figura 2.11.

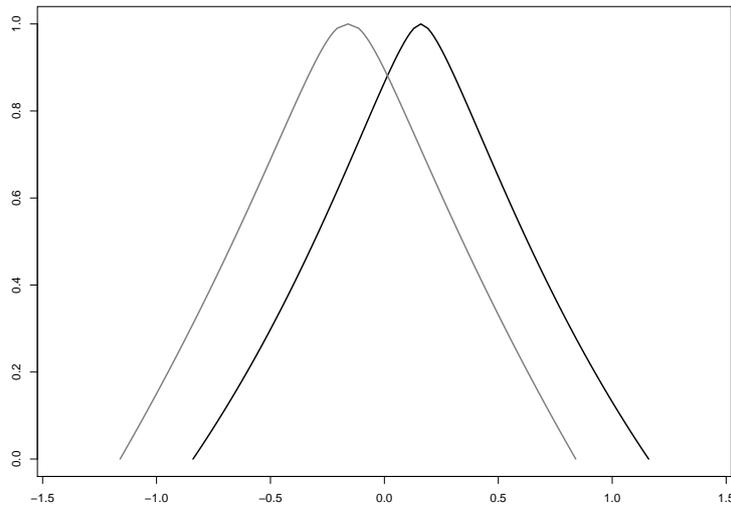


Figura 2.11: Medias tipo Aumann de la  $\gamma^{sim}$ -fuzzificación de la distribución muestral de  $X - 1$  (derecha, en línea negra) y de la distribución muestral de  $1 - X$  (izquierda, en línea gris)

La aplicación del algoritmo asociado al contraste de simetría (implementado por Trutschnig y Lubiano en R [43, 44]), con  $B = 1000$  iteraciones bootstrap, da lugar a un  $p$ -valor de 0.14, de manera que, a la vista de las evidencias muestrales y para los niveles de significación más usuales, no es descartable que los datos puedan provenir de una distribución simétrica respecto de 1 (mediana de la distribución muestral).

# Conclusiones finales

Para finalizar el trabajo, puede concluirse que en él se han recordado, en primer lugar, conceptos y resultados fundamentales de la teoría de los números *fuzzy*, y su incorporación a la modelización de mecanismos que generan aleatoriamente datos imprecisos y al análisis estadístico de tales datos. Se ha resaltado que las ideas y procedimientos así desarrollados constituyen extensiones, más o menos complejas, de ideas y procedimientos de la generación y análisis de datos reales, pero que la falta de linealidad del espacio de los números *fuzzy* con la aritmética usual obliga a recurrir a técnicas diferentes de las del caso de datos reales o a introducir nuevas herramientas. En este sentido, la consideración de métricas apropiadas y los consiguientes encajes isométricos en conos de espacios de Hilbert de funciones aportan las garantías matemáticas necesarias para que tales desarrollos se lleven a cabo con el rigor y soporte debidos.

En segundo lugar, el trabajo muestra cómo además de que mediante los números *fuzzy* y los números *fuzzy* aleatorios pueden tratarse un buen número de problemas que involucran datos imprecisos, a menudo provenientes de valoraciones humanas, actitudes, etc., la metodología desarrollada hasta el momento puede aplicarse también al análisis de algunos problemas estadísticos sobre datos numéricos. Esto último, es cierto gracias a la posibilidad de encontrar un funcional caracterizador de la distribución de una variable aleatoria real que se basa en el valor medio de un número *fuzzy* aleatorio. Una de las ventajas notables de los procedimientos de análisis de esos problemas es su consistencia, por estar basados en valores medios, y su versatilidad, que le permite ser aplicable cualquiera que sea el tipo de distribución con la que se trabaje.

Por lo que concierne a posibles estudios futuros al respecto, son muchos los problemas abiertos. Entre ellos, pueden señalarse:

- el estudio de la influencia de las elecciones de las ponderaciones  $\theta$  y  $\varphi$ ; en ese sentido, en González-Rodríguez *et al.* [18] aparece un estudio incipiente en cuanto a la influencia en el contraste de bondad de ajuste para una clase paramétrica concreta;
- el estudio de la elección de la *fuzzificación* caracterizadora,  $\gamma^C$ ;
- el estudio comparativo de los procedimientos de contraste de bondad de ajuste o de simetría con los métodos más conocidos; en un primer avance realizado en en González-Rodríguez *et al.* [18], el contraste de bondad de ajuste basado en  $\gamma^s$  resulta bastante competitivo, siempre que no se compare con los métodos diseñados expresamente y solamente válidos para el contraste a un tipo de distribución de una clase paramétrica concreta;
- el desarrollo de otros contrastes de igualdad de distribuciones, como puede ser el ANOVA de distribuciones, y su posterior comparación con otros métodos disponibles en la literatura.

# Referencias

## y otra bibliografía consultada

- [1] Araujo, A.P., Giné, E. *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*. John Wiley & Sons, New York (1980)
- [2] Arellano Jiménez, I. *Análisis Estadístico de Datos Basados en la Escala de Valoración Fuzzy*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Oviedo (2018)
- [3] Bertoluzza, C., Corral, N., Salas, A. On a new class of distances between *fuzzy* numbers. *Math & Soft Comput.* 2, 71–84 (1995)
- [4] Blanco-Fernández, A., Casals, M.R., Colubi, A., Corral, N., García-Bárcana, M., Gil, M.A., González-Rodríguez, G., López, M.T., Lubiano, M.A., Montenegro, M., Ramos-Guajardo, A.B., De la Rosa de Sáa, S., Sinova, B. A distance-based statistical analysis of *fuzzy* number-valued data. *Int. J. Approx. Reas.* 55(7), 1487–1501 (2014)
- [5] Blanco-Fernández, A., Casals, M.R., Colubi, A., Corral, N., García-Bárcana, M., Gil, M.A., González-Rodríguez, G., López, M.T., Lubiano, M.A., Montenegro, M., Ramos-Guajardo, A.B., De la Rosa de Sáa, S., Sinova, B. Rejoinder on “A distance-based statistical analysis of *fuzzy* number-valued data”. *Int. J. Approx. Reas.* 55, 1601–1605 (2014)
- [6] Casals, M.R., Corral, N., Gil, M.A., López, M.T., Lubiano, M.A., Montenegro, M., Naval, G., Salas, A. Bertoluzza *et al.*'s metric as a basis for analyzing *fuzzy* data. *Metron*, 71 (3), 307–322 (2013)
- [7] Colubi, A., Domínguez-Mencheró, J.S., López-Díaz, M., Ralescu, D.A. A  $D_E[0, 1]$  representation of random upper semicontinuous functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130, 3237–3242 (2002)
- [8] Colubi, A., González-Rodríguez, G. Triangular fuzzification of random variables and power of distribution tests: Empirical discussion. *Comp. Stat. & Data Anal.*, 51, 4742–4750 (2007)
- [9] Colubi, A., López-Díaz, M., Domínguez-Mencheró, J.S., Gil, M.A. A generalized Strong Law of Large Numbers. *Probab. Theory Relat. Fields*, 114, 401–417 (1999)
- [10] Diamond, P., Kloeden, P. Metric spaces of *fuzzy* sets. *Fuzzy Sets Syst.* 35, 241–249 (1990)
- [11] Dubois, D., Prade, H. *Fuzzy* real algebra: some results. *Fuzzy Sets Syst.* 2, 327–348 (1979)
- [12] Efron, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Ann. Statist.* 7(1), 1–26 (1979)
- [13] Féron, R. Ensembles aléatoires flous. *C. R. Acad. Sc. Paris A* 282, 903–906 (1976)

- [14] Fréchet, M. Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié. *Ann. L'Inst. H. Poincaré*, 10, 215–310 (1948)
- [15] Gil, M.A., Lubiano, M.A., Montenegro, M., López, M.T.. Least squares fitting of an affine function and strength of association for interval-valued data. *Metrika*, 56, 97–111 (2002)
- [16] Giné, E., Zinn, J. Bootstrapping general empirical measures. *Ann. Probab.*, 18, 851–869 (1990)
- [17] Goetschel, R.Jr, Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets Syst.*, 18, 31–43 (1986)
- [18] González-Rodríguez, G., Colubi, A., Gil, M.A. A fuzzy representation of random variables: An operational tool in exploratory analysis and hypothesis testing. *Comp. Stat. & Data Anal.*, 51 (1), 163–176 (2006)
- [19] González-Rodríguez, G., Colubi, A., Gil, M.A., D'Urso, PP. An asymptotic two dependent samples test of equality of means of fuzzy random variables. En: Rizzi, A., Vichi, M., Eds., *COMPSTAT 2006–Proceedings in Computational Statistics*, 689–695, Physica-Verlag, Heidelberg (2006)
- [20] González-Rodríguez, G., Montenegro, M., Colubi, A., Gil, M.A. Bootstrap techniques and fuzzy random variables: Synergy in hypothesis testing with fuzzy data. *Fuzzy Sets Syst.*, 157 (19), 2608–2613 (2006)
- [21] Hajian, A., Styles, P. Fuzzy Logic. Chapter 3. *Application of Soft Computing and Intelligent Methods in Geophysics*. Springer Geophysics, Cham (2018)
- [22] Herrera, F., Martínez, L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.-Part B*, 31 (2), 227–234 (2001)
- [23] Kaleva, O., Seikkala, S. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, 12, 215–229 (1984)
- [24] Kendall, D.G. Foundations of a theory of random sets. En: Harding, E.F., Kendall, D.G., Eds., *Stochastic Geometry*, 322–376. J. Wiley, New York. (1974)
- [25] Klement, E.P., Puri, M.L., Ralescu, D.A. Limit theorems for fuzzy random variables. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 407, 171–182 (1986)
- [26] Körner, R. An asymptotic  $\alpha$ -test for the expectation of random fuzzy variables. *J. Stat. Plann. Infer.*, 83, 331–346 (2000)
- [27] Krätschmer, V. A unified approach to fuzzy random variables. *Fuzzy Sets Syst.*, 123, 1–9 (2001)
- [28] Likert, R. A technique for the measurement of attitudes. *Arch. Psychol.* 22(140), 1–55 (1932)
- [29] Lubiano, M.A., Gil, M.A., López-Díaz, M., López, M.T. The  $\vec{\bar{X}}$ -mean squared dispersion associated with a fuzzy random variable. *Fuzzy Sets Syst.* 111, 307–317 (2000)
- [30] Lubiano, M.A., Montenegro, M., Sinova, B., De la Rosa de Saa, S., Gil, M.A. Hypothesis testing for means in connection with fuzzy rating scale-based data: algorithms and applications. *Eur. J. Oper. Res.* 251, 918–929 (2016)
- [31] Matheron, G. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Spns, New York (1975)
- [32] Ming, M. On embedding problems of fuzzy number spaces: Part 4. *Fuzzy Sets Syst.* 58, 185–193 (1993)

- [33] Minkowski, H. Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.*, 57, 447–495 (1903)
- [34] Mizumoto, M., Tanaka, K. Some properties of fuzzy numbers. En: Gupta, M.M., Ragade, R.K., Yager, R., Eds., *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. North-Holland Pub, New York, 153–164 (1979)
- [35] Molchanov, I.S. On Strong Laws of Large Numbers for random upper semicontinuous functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 235, 349–355 (1999)
- [36] Montenegro, M., Colubi, A., Casals, M.R., Gil, M.A. Asymptotic and Bootstrap techniques for testing the expected value of a fuzzy random variable. *Metrika*, 59 (1), 31–49 (2004)
- [37] Moore, R.E. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1966)
- [38] Nguyen, H.T. A note on the extension principle for fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.* 64, 369–380 (1978)
- [39] Puri, M.L., Ralescu, D.A. The concept of normality for fuzzy random variables. *Ann. Probab.*, 11, 1373–1379 (1985)
- [40] Puri, M.L., Ralescu, D.A. Fuzzy random variables. *J. Math. Anal. Appl.*, 114, 409–422 (1986)
- [41] Sinha, P. An observation about goodness-of-fit tests of distributions. *Busin. Intel. J.*, 5 (1), 187–189 (2012)
- [42] Trutschnig, W., González-Rodríguez, G., Colubi, A., Gil, M.A., A new family of metrics for compact, convex (fuzzy) sets based on a generalized concept of mid and spread. *Inform. Sci.*, 179, 3964–3972 (2009)
- [43] Trutschnig, W., Lubiano, M.A. SAFD: Statistical Analysis of Fuzzy Data (<http://cran.r-project.org/web/packages/SAFD/index.html>) (2014-last update)
- [44] Trutschnig, W., Lubiano, M.A., Lastra, J. SAFD - An R package for Statistical Analysis of Fuzzy Data. En: Borgelt, C., Gil, M.A., Sousa, J.M.C., Verleysen, M., Eds. *Towards Advanced Data Analysis by Combining Soft Computing and Statistics*, Stud. Fuzz. Soft Comp. Vol. 285, 107–118. Springer, Heidelberg (2013)
- [45] Vitale, R.A.  $L_p$  metrics for compact, convex sets. *J. Approx. Theor.*, 45, 280–287 (1985)
- [46] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. *Inform. Contr.* 8(3), 338–353 (1965)
- [47] Zadeh, L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 1. *Inform. Sci.* 8, 199–249; Part 2. *Inform. Sci.* 8, 301–353; Part 3. *Inform. Sci.* 9, 43–80 (1975)



# Índice temático

- $(W, \varphi)$ -distancia entre números *fuzzy*, 12
  - equivalencia topológica, 18
  - invarianza por rotaciones, 18
  - invarianza por traslaciones, 18
  - propiedades métricas, 13
  - separabilidad del espacio métrico  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_W^\varphi)$ , 18
  - versión equivalente  $D_\theta^\varphi$ , 17
  - versión equivalente  $D_{W_\lambda}^\varphi$ , 15
- $(\theta, \varphi)$ -distancia entre números *fuzzy*, 16
  - equivalencia topológica, 18
  - invarianza por rotaciones, 18
  - invarianza por traslaciones, 18
  - separabilidad del espacio métrico  $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta^\varphi)$ , 18
  - versión equivalente  $D_W^\varphi$ , 17
- $W$ -distancia entre intervalos, 11
- $\alpha$ -niveles
  - $W$ -distancia, 11
- en cono convexo de espacio de Hilbert de funciones, 23
- fuzzificador*, 42
- análisis de datos *fuzzy*
  - algoritmo del contraste bimuestral sobre medias tipo Aumann de NFAs dependientes, 40
- algoritmo del contraste
  - unimuestral sobre media tipo Aumann, 38
- carencias e inconvenientes, 36
- directrices metodológicas, 36
- fortalezas de la metodología, 37
- aritmética de números *fuzzy*
  - no coincidencia con la aritmética funcional, 10
  - no linealidad del espacio de números *fuzzy*, 10
- problemas con la diferencia de números *fuzzy*, 10
- producto por escalar
  - expresión funcional, 7
  - expresión nivel a nivel, 9
- suma
  - expresión funcional, 7
  - expresión nivel a nivel, 7
- conjunto *fuzzy* aleatorio
  - bidimensional, 38
- contraste de bondad de ajuste a distribución totalmente especificada, 49
- test  $\chi^2$  de Pearson, 50
- test  $\chi^2$  de razón de verosimilitudes, 50

- test basado en la  $\gamma^C$ -fuzzificación
  - caracterizadora, 53
- test de Anderson-Darling, 51
- test de Cramér-Von Mises, 51
- test de Kolmogorov-Smirnov, 51
- contraste de simetría de la
  - distribución de una variable aleatoria respecto de un punto concreto
- test basado en la  $\gamma^C$ -fuzzificación
  - caracterizadora, 60
  
- distancia  $D_\theta^\varphi$  entre números *fuzzy*, 16
- distancia  $D_{W_\lambda}^\varphi$  entre números *fuzzy*, 14
- distancia  $D_W^\varphi$  entre números *fuzzy*, 12
  
- función
  - cuasi-cóncava, 2, 3
  - semicontinua superiormente, 2, 3
  
- número *fuzzy* aleatorio
  - definición original, 26
  - definiciones equivalentes, 27
  - discreto, 31
  - distribución inducida, 27
  - función medible Borel, 27
  - integrabilidad acotada, 28
  - media muestral tipo Aumann, 32
  - media tipo Aumann, 28
  - media tipo Aumann de un
    - aditividad, 33
    - coherencia con la aritmética *fuzzy* en el caso discreto, 32
  - es número *fuzzy*, 28
  - esperanza de Fréchet, 34
  - expresión niveal-a-nivel, 28
  - función soporte de, 31
  - invarianza frente a
    - transformaciones afines, 32
- números *fuzzy*
  - $(W, \varphi)$ -distancia, 12
  - $(\theta, \varphi)$ -distancia, 16
  - $\alpha$ -niveles (o  $\alpha$ -cortes), 3
  - cuasi-concavidad, 2
  - definición: enfoque horizontal, 3
  - definición: enfoque vertical, 2
  - función soporte, 23
  - identificación con valores
    - funcionales, 24
  - normal, 2
  - producto por escalar, 7
  - producto por escalar de
    - extensión del producto por escalar intervalar, 9
  - representación ínf/sup, 3
  - representación mid/spr, 16
  - semicontinuidad superior, 2
  - soporte topológico, 2
  - suma de, 7
    - extensión de la suma intervalar, 7
  - triangulares, 5
- números *fuzzy* aleatorios
  - independencia de, 27
- números *fuzzy*
  - números trapezoidales, 6
- NFA, 26
  
- representación *fuzzy*
  - caracterizadora de la distribución de una variable aleatoria real, 44
  - de una variable aleatoria real, 42

- triangular de una variable  
aleatoria real, 42
- variable aleatoria real
  - fuzzificación*, 42
  - fuzzificación* caracterizadora de la  
distribución, 44
  - fuzzificación* triangular, 42
  - representación *fuzzy*, 42
  - representación *fuzzy*
    - caracterizadora de la  
distribución de, 44
  - representación *fuzzy* triangular, 42



# Índice de símbolos

- $D_W^\varphi$   
 $(W, \varphi)$ -distancia entre dos números *fuzzy*, 12
- $D_{W_\lambda}^\varphi$   
 $(\lambda, \varphi)$ -distancia entre dos números *fuzzy*, 14
- $D_\theta^\varphi$   
 $(\theta, \varphi)$ -distancia entre dos números *fuzzy*, 16
- $\|h - h'\|_\theta^\varphi$   
 norma en  $\mathbb{H}_2$ , 23
- $\delta_2$   
 distancia 2-norma entre intervalos compactos no vacíos, 11
- $\gamma^C$   
*fuzzificador* caracterizador, 44
- $\gamma^s$   
 ejemplo de *fuzzificador* caracterizador, 46
- $\gamma^{s_0}$   
 ejemplo de *fuzzificador* caracterizador, 58
- $\gamma^{sim}$   
 ejemplo de *fuzzificador* caracterizador, 55, 61
- $\langle f, g \rangle_\theta^\varphi$   
 producto interior en  $\mathbb{H}_2$ , 23
- $\mathbb{1}_K$   
 función indicador del conjunto  $K$ , 5
- $\mathbb{H}_2$   
 espacio de Hilbert de funciones integrables en  $[0, 1] \times \{-1, 1\}$ , 23
- $\mathcal{X}$   
 notación genérica de un NFA, 26
- $\mathcal{X}_\alpha$   
 notación función  $\alpha$ -nivel de  $\mathcal{X}$ , 26
- $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$   
 espacio de los números *fuzzy*, 3
- $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$   
 espacio de los intervalos compactos no vacíos, 7
- $\text{Tri}(a, b, c)$   
 número *fuzzy* triangular de puntos de referencia  $a < b < c$ , 6
- $\text{cl}$   
 clausura topológica de un conjunto, 3
- $\text{mid } K$   
 punto medio del intervalo  $K$ , 15
- $\text{spr } K$   
 semiamplitud del intervalo  $K$ , 15
- $\tilde{E}(\mathcal{X})$   
 media tipo Aumann de  $\mathcal{X}$ , 28
- $\tilde{U}$   
 notación genérica de número *fuzzy*, 2
- $\tilde{U}_\alpha$   
 conjunto  $\alpha$ -nivel de  $\tilde{U}$ , 3

$d_H$ 

distancia de Hausdorff entre intervalos compactos no vacíos, 19

 $d_W$ 

$W$ -distancia entre dos intervalos compactos no vacíos, 11

 $d_2^{\mathcal{F}}$ 

distancia  $L^2$  de Klement *et al.* entre números *fuzzy*, 19

 $s_{\tilde{U}}$ 

función soporte de  $\tilde{U}$ , 23

NFA

número *fuzzy* aleatorio, 26